

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

MARC PELEGRIN

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
INGÉNIEUR MILITAIRE DE L'AIR

1^{re} THÈSE

CALCUL STATISTIQUE DES SYSTÈMES ASSERVIS

2^e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

LES DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES ET LEURS APPLICATIONS

Soutenues le 6 novembre 1952, devant la Commission d'Examen

Jury	{	MM. J. PÉRÈS	{	Président.
		G. DARMOIS		Examineurs.
		G. RIBAUD		

1953

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

MARC PELEGRIN

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
INGÉNIEUR MILITAIRE DE L'AIR

1^{re} THÈSE

CALCUL STATISTIQUE DES SYSTÈMES ASSERVIS

2^e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

LES DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES ET LEURS APPLICATIONS

Soutenues le 6 novembre 1952, devant la Commission d'Examen

<i>Jury</i> {	MM. J. PÉRÈS	<i>Président.</i>
	G. DARMOIS	{ <i>Examineurs.</i>
	G. RIBAUD	



CALCUL STATISTIQUE DES SYSTÈMES ASSERVIS

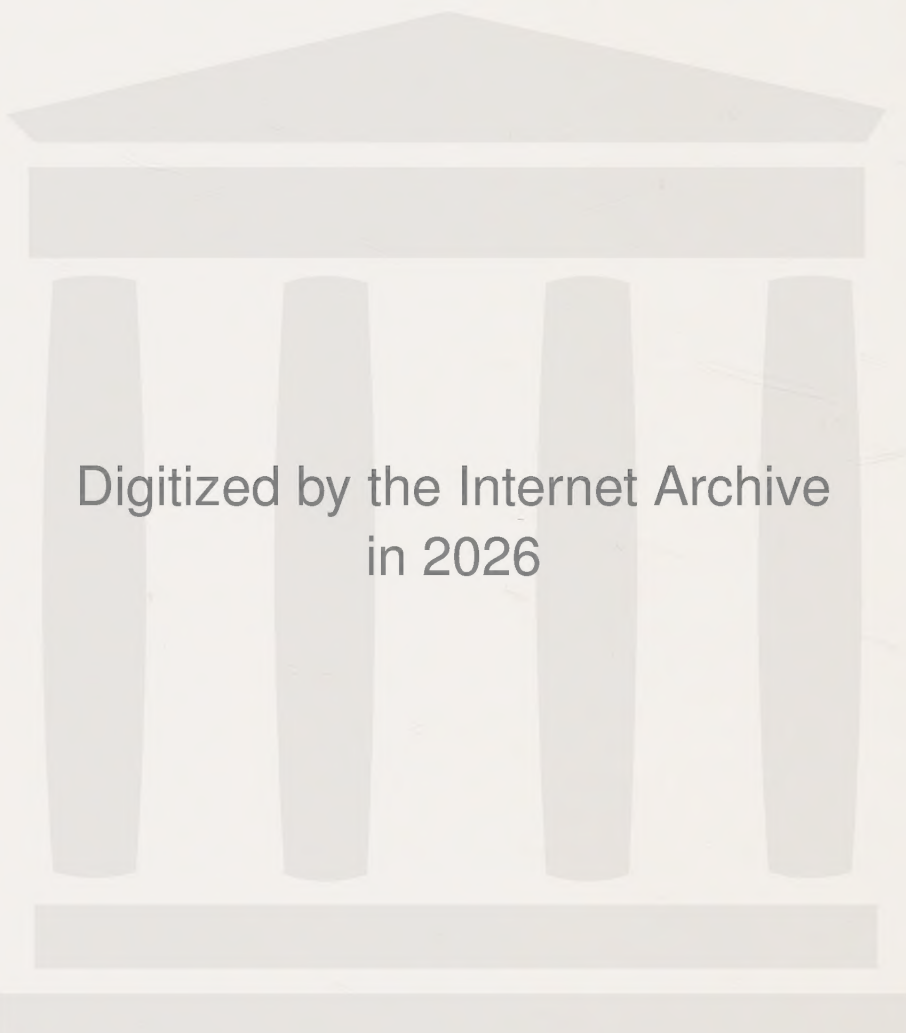
FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen M. A. CHATELET

PROFESSEURS

G. JULIA	T	Analyse supérieure et algèbre supérieure.	CHRÉTIEN	T	Chimie minérale.
A. DENJOY	T	Théorie des fonctions.	P. DRACH	T	Zoologie.
L. LUTAUD	T	Géographie physique et géologie dynamique.	KASTLER	T	Physique.
E. DARMOIS	T	Enseignement de physique.	CHATELET	T	Arithmétique et théorie des nombres.
Robert LÉVY	T	Physiologie comparée.	EPHRUSSI	T	Génétique.
M ^{me} RAMART-LUCAS	T	Chimie organique.	WURMSER	T	Biologie physico-chimique.
FÖRCH	T	Mécanique physique et expérimentale.	BAUER	T	Chimie-physique.
PAUTHENIER	T	Électrotechnique générale.	RIVIÈRE		Géologie (P.C.B.).
DE BROGLIE	T	Théories physiques.	GAUTHERET	T	Biologie végétale (P.C.B.).
JOB	T	Chimie générale.	LUCAS	T	Physique.
PRENANT	T	Anatomie et histologie comparées.	A. THOMAS	T	Évolution des êtres organisés.
COMBES	T	Physiologie végétale.	ARNULF		Optique appliquée.
GARNIER	T	Géométrie supérieure.	MAX MORAND		Physique.
PÉRÈS	T	Mécanique des fluides et applications.	SOLEILLET		Physique.
LAUGIER	T	Physiologie générale.	FORTIER	T	Mécanique expérimentale des fluides.
TOUSSAINT	T	Technique aéronautique.	DANJON	T	Astronomie.
M. CURIE	T	Physique (P.C.B.).	FROMAGEOT	T	Chimie biologique.
G. RIBAUD	T	Hautes températures.	LAPORTE	T	Physique générale et radio-activité.
CHAZY	T	Mécanique analytique et mécanique céleste.	JANET	T	Mathématiques générales.
CROZE	T	Physique théorique et physique céleste.	PETIT	T	Biologie maritime.
DUPONT	T	Théories chimiques.	QUENEY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.
VALIRON	T	Calcul différentiel et calcul intégral.	GALLIEN	T	Biologie animale (P.C.B.).
BARRABÉ	T	Géologie structurale et géologie appliquée.	EICHHORN		Biologie végétale (P.C.B.).
VAYON	T	Analyse et mesures chimiques.	DE CUGNAC		Biologie végétale (P.C.B.).
G. DARMOIS	T	Calcul des probabilités et physique mathématique.	M ^{me} CAUCHOIS	T	Chimie-physique.
Jacques BOURCART	T	Géographie physique et géologie dynamique.	THELLIER		Physique du globe.
AUBEL	T	Chimie biologique.	AUDUBERT		Électrochimie.
M ^{me} JOLIOT-CURIE	T	Physique générale et radio-activité.	L'HÉRITIER		Génétique.
PLANTEFOL	T	Botanique.	GRIVET	T	Radio-électricité.
CABANNES	T	Recherches physiques.	PONCIN		Mécanique des fluides.
GRASSÉ	T	Évolution des êtres organisés.	THIRY	T	Mécanique appliquée.
PRÉVOST	T	Chimie organique.	DUBREIL		Mathématiques générales.
BOULIGAND	T	Application de l'analyse à la géométrie.	QUELET		Chimie (P.C.B.).
CHAUDRON	T	Chimie appliquée.	CAGNIARD		Géophysique appliquée.
WYART	T	Minéralogie.	CHAMPETIER		Chimie appliquée.
TEISSIER	T	Zoologie.	CUVILLIER		Géologie structurale et géologie appliquée.
MANGENOT	T	Biologie végétale.	JUNG	T	Pétrographie.
P. AUGER	T	Physique quantique et relativité.	TRILLAT		Physique (P.C.B.).
MONNIER		Physiologie générale.	WIEMANN		Chimie (P.C.B.).
PIVETEAU	T	Géologie.	LICHNEROWICZ		Mathématiques générales.
ROCARD	T	Physique.	JACQUINOT	T	Physique (P.C.B.).
H. CARTAN	T	Mathématiques (E. N. supérieure).	VASSY		Physique de l'atmosphère.
SCHAEFFER	T	Physiologie des fonctions.	DESTOUCHES		Théories physiques.
LAFFITTE	T	Chimie générale.	M. PRUVOST	T	Géologie.
FAVARD	T	Mécanique générale.	AMIEL		Chimie (P.C.B.).
COULOMB	T	Physique du globe.	HOCART		Minéralogie.
M ^{lle} COUSIN	T	Biologie animale (P.C.B.).	MACHEBEUF		Microbiologie.
			J.-P. MATHIEU		Physique (P.C.B.).
			COUTEAUX		Biologie animale (P.C.B.).
			MAY		Biologie animale (P.C.B.).
			CHOQUET		Calcul différentiel.
			FELDMANN		Biologie (P.C.B.).
			GUINIER		Physique (P.C.B.).
			JOST		Biologie (P.C.B.).

Secrétaire Ch. MONIER



Digitized by the Internet Archive
in 2026

A ma femme,

A mes parents.

TABLE DES MATIÈRES

PAGES

INTRODUCTION	1
CHAPITRE PREMIER	
SYSTÈMES ASSERVIS ET THÉORIE DE WIENER	
1.1 Fonction de transfert d'un système linéaire	3
1.1.1 Définition d'un système linéaire	3
1.1.2 Transformation de Fourier	3
1.1.3 Analyse harmonique	4
1.1.4 Transformation de Fourier dans le plan complexe	4
1.1.5 Transformation de Laplace	5
1.1.6 Définitions relatives aux systèmes asservis	6
1.1.7 Deux types de systèmes asservis	8
1.1.8 Fonctions de transfert des systèmes asservis	9
1.1.9 Différentes fonctions de transfert d'un système asservi	11
1.2 Stabilité des systèmes asservis. Définition classique. Définition statistique...	12
1.2.1 Définition classique	12
1.2.2 Circuit à avance de phase	12
1.2.3 Application	16
1.2.4 Énergie délivrée par le circuit	17
1.2.5 Critère de stabilité dans le cas d'un signal aléatoire	18
1.3 Remarques concernant l'analyse harmonique	22
1.4 Rappel des théories de Wiener	24
1.4.1 Problème	24
1.4.2 Mise en équation	25
1.4.3 Solution de l'équation de Wiener Hopf	26

CHAPITRE II

DÉTERMINATION DES FONCTIONS DE TRANSFERT DES SYSTÈMES ASSERVIS LINÉAIRES

2.1 Problème	28
2.1.1 Remarques préliminaires	28
2.1.2 Critère de performance	30
2.1.3 Différentes configurations possibles	31
2.1.4 Fonction de transfert du réseau correcteur	32
2.2 Cas général	33
2.2.1 Block-diagram et notations	33
2.2.2 Principe de la méthode	33
2.2.3 Mise en équation	34

2.2.4 Minimisation de cette erreur	37
2.2.5 Unicité de l'équation (2.35) dans le cas général	42
2.2.6 Solution générale	44
2.3 Cas des systèmes asservis	46
2.3.1 Particularités par rapport au cas général	46
2.3.2 Cas des pôles à l'origine	47
2.3.3 Équation équivalente à celle de Wiener Hopf	48
2.3.4 Unicité de la solution	48
2.3.5 Solution de l'équation (2.76)	50
2.3.6 Exemple : solution générale et passage à la limite	50
2.3.7 Exemple d'application, solution directe	54
2.3.8 Conclusions	55

CHAPITRE III

ÉTUDE PARTICULIÈRE DES RELAIS

3.1 Remarques sur l'utilisation des relais	57
3.1.1 Définitions	57
3.1.2 Différentes utilisations	57
3.1.3 Seuil	58
3.1.4 Non-linéarité	59
3.2 Relais de signe	61
3.2.1 Remarque préliminaire	61
3.2.2 Problème	61
3.2.3 Cas où la constante de temps du relais peut être négligée	62
3.2.4 Cas où l'on ne néglige pas la constante de temps moyenne	63
3.2.5 Cas général	64
3.3 Relais balance	69
3.3.1 Forme générale de la tension de commande	70
3.3.2 Équations du relais	70
3.3.3 Seuil d'énergie d'un relais	73
3.3.4 Étude expérimentale	74
3.3.5 Relais balance : solution approchée	75
3.3.6 Cas particulier important	76
3.3.7 Résultats expérimentaux	77
3.4 Constantes de temps de relais	77
3.4.1 Étude d'un lot de cent relais soumis à la même excitation	77
3.4.2 Étude répétitive d'un relais	84

CHAPITRE IV

PROCÉDÉS ET MOYENS DE CALCUL REMARQUES SUR LES SYSTÈMES NON LINÉAIRES

4.1 Systèmes linéaires et systèmes non linéaires	88
4.1.1 Systèmes linéaires	88
4.1.2 Différentes sortes de non-linéarité	88
4.1.3 Diagramme de linéarité du système	89

4,2	Remarques sur le calcul des systèmes non linéaires	93
1,2.1	Problème	93
1,2.2	Exemple : écrêteur parfait	94
1,2.3	Caractéristiques moyennes d'un système	98
1,2.4	Introduction d'éléments non linéaires dans la synthèse des systèmes asservis	100
1,2.5	Remarques	101
4,3	Machines existantes ou proposées pour la détermination des lois statistiques ...	103
4,3.1	Données	103
4,3.2	Autocorrélateurs	104
4,3.3	Chronographe statistique	105

CHAPITRE V

DONNÉES EXTERNES ÉTUDE DE LA TURBULENCE ATMOSPHERIQUE

5,1	Perturbations auxquelles les aérodynes sont soumis	112
5,1.1	Perturbations d'origines non-atmosphériques	112
5,1.2	Perturbations atmosphériques	113
5,1.3	Spectre des rafales	114
5,1.4	Remarques concernant les simulateurs	115
5,2	Échelles des longueurs et des temps de la turbulence	116
5,2.1	Problème	116
5,2.2	Échelle des longueurs	118
5,2.3	Échelle des temps	119
5,3	Principe de la méthode proposée	121
5,3.1	État actuel de la question	121
5,3.2	Critique des méthodes actuellement utilisées	122
5,3.3	Méthode suggérée	123
5,3.4	Généralités concernant les essais effectués	124
5,4	Différentes méthodes essayées	125
5,4.1	Première version	125
5,4.2	Deuxième version	129
5,4.3	Troisième version	130
5,5	Résultats obtenus avec les détecteurs à fils chauds	132
5,5.1	Choix des sondes et étalonnage	132
5,5.2	Grandeurs enregistrées	133
5,5.3	Aspects des résultats	134
5,5.4	Dépouillement point par point	142
5,6	Résultats statistiques. Spectre d'une turbulence	142
5,6.1	Fonction d'autocorrélation et spectre	142
5,6.2	Coefficient de turbulence	146
5,6.3	Corrélations mutuelles	147
5,6.4	Stationnarité dans l'espace	147
	Conclusion	148
	ANNEXE I. — Circuit à avance de phase, entrée sinusoïdale	149
	ANNEXE II	153
	BIBLIOGRAPHIE	157

INTRODUCTION

L'origine de ce travail réside dans un cours sur la théorie statistique des télécommunications par le Professeur Y. W. LEE ⁽¹⁾.

L'idée maîtresse de ce cours, issue des récentes théories de N. Wiener, réside dans le fait que le message à transmettre n'est pas considéré d'une façon intrinsèque, mais seulement comme appartenant à une classe, à un ensemble de messages tous caractérisés par la même fonction d'autocorrélation.

Ces considérations statistiques s'imposent d'elles-mêmes d'ailleurs, dès que l'on veut introduire, d'une façon assez précise, le « bruit » dans un système.

Il nous a semblé que le problème des systèmes asservis (servomécanismes) était bien proche de celui-ci, dans un grand nombre de cas tout au moins; cependant, la complexité relativement grande quant aux calculs, de la théorie de Wiener-Lee ⁽²⁾, pourrait être un premier obstacle à l'introduction de théories analogues dans ce domaine.

En fait, il n'en est rien et l'application d'une théorie analogue, pour la détermination des réseaux correcteurs de servomécanismes linéaires, conduit à des calculs extrêmement simples.

Un exemple numérique sera considéré et traité successivement par deux méthodes : l'une directement issue de la théorie de Wiener-Lee relative aux « communications », l'autre propre aux « systèmes asservis ».

Nous avons essayé de généraliser ce résultat aux systèmes non linéaires : le seul que nous ayons considéré en détail est le système où la non-linéarité est constituée par un relais. C'est le cas d'un grand nombre de systèmes, en particulier de presque tous les pilotes automatiques d'avion ou d'engins autopilotés. La connaissance de quelques propriétés statistiques de la fonction aléatoire de commande du relais, jointe à celle des deux constantes de temps moyennes d'ouverture et de fermeture du relais, suffisent à déterminer le spectre de la fonction de sortie du relais.

Nous nous sommes rendus compte, dès le début de ce travail, que la mise en œuvre de ces méthodes nécessitait des moyens de dépouillements automatiques. La détermination des fonctions, liées aux fonctions aléatoires, dont nous avons besoin, suppose le dépouillement de nombreuses « épreuves » de la fonction aléatoire (ou d'une épreuve suffisamment longue); ce travail est irréalisable à la main.

Hors les autocorrélateurs, désormais classiques, nous avons proposé une machine qui permet de donner les principales fonctions dont nous avons besoin.

Enfin, reste le cas où le phénomène lui-même est mal connu : seul son caractère aléatoire est établi, mais les paramètres caractérisant le phénomène ne sont pas en évidence; de plus, la stationnarité de ce phénomène n'est souvent qu'intuitive. C'est le cas des rafales atmosphériques. Il faut d'abord définir ce que l'on entend par rafales atmosphériques, puis essayer d'enregistrer une ou des grandeurs liées à elles, vérifier leur stationnarité dans le temps et dans l'espace et en déduire un spectre énergétique.

(1) M.I.T., Cambridge, Mass., U.S.A., cours suivi en 1949-1950.

(2) Sera rappelée à la fin du chapitre premier.

Nous avons souvent parlé de pilotes automatiques au cours de ce travail : nous n'aurions pas voulu passer sous silence la détermination du spectre des perturbations; mais l'ampleur et la difficulté de ce problème nous ont conduit, simplement, à suggérer une méthode d'étude de la turbulence et à donner les premiers résultats que nous avons obtenus.

Tels sont les principaux points développés dans ce travail où les phénomènes sont considérés non pas isolément, mais comme appartenant à des fonctions aléatoires stationnaires. Cette hypothèse est, bien entendu, fondamentale : un système, linéaire, par exemple, calculé pour une entrée aléatoire stationnaire à spectre donné et soumis à des perturbations, également aléatoires stationnaires à spectre connu, peut avoir une très mauvaise réponse pour une sollicitation en échelon unité ⁽¹⁾.

D'autres questions ont été étudiées : par exemple, la loi de probabilité des instants de fermeture d'un lot de cent relais excités simultanément et celle d'un relais excité un grand nombre de fois ont été déterminées. Cette dernière mesure a révélé que, lorsqu'un relais est monté sur un support susceptible de vibrer (avions à moteurs à pistons, en particulier), la dispersion est extrêmement grande : elle pourrait expliquer des incidents de fonctionnement curieux.

Le sujet englobé par ce travail est tellement vaste qu'il eût été difficile de se contenter d'approfondir une question particulière et de la traiter à grand renfort de détails. Nous avons préféré tenter une synthèse concernant un problème particulier (pilotes automatiques); cet essai montrera certainement mieux l'intérêt des théories statistiques dans un domaine jusqu'ici réservé presque exclusivement au calcul symbolique, aux excitations sinusoïdales et aux « rafales types de 16 m/s » ⁽²⁾ si loin de la réalité.

(1) A moins, bien entendu, que la fonction aléatoire stationnaire soit elle-même constituée par une succession d'échelons unités. Ce type d'entrée sera précisément celui qui sera considéré dans l'exemple numérique donné à la fin du chapitre II.

(2) Norme AIR 2004-C.

SYSTÈMES ASSERVIS ET THÉORIE DE WIENER

1,1 FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTÈME LINÉAIRE A COEFFICIENTS CONSTANTS

1,1.1 Définition d'un système linéaire.

Un système linéaire est un système régi par un système d'équations différentielles, d'un ordre quelconque, mais linéaires par rapport aux fonctions et à leurs dérivées. La propriété fondamentale de tels systèmes est que le principe de superposition est applicable : si $y_1(t)$ et $y_2(t)$ sont deux solutions du système, $C_1 y_1 + C_2 y_2$ l'est aussi (C_1 et C_2 sont deux constantes).

Usuellement, et dans l'étude des systèmes asservis en particulier, on appelle système « linéaire » un système régi par des équations linéaires à coefficients constants. En plus de la propriété rappelée ci-dessus, ils sont susceptibles d'être étudiés à l'aide de la transformation de Laplace; cette transformation permet, dans certaines conditions très générales, par des calculs relativement simples, d'obtenir des conditions quantitatives sur la stabilité.

L'étude directe dans le domaine des temps, du système d'équations, conduit à des calculs longs et compliqués, dès que l'ordre dépasse le second. La question de stabilité est, en effet, primordiale : elle se traite en recherchant les racines réelles positives ou imaginaires à partie réelle positive de l'équation caractéristique. Divers critères ont été établis, mais aucun est d'un emploi commode (critère de Routh, conditions d'Hurwitz).

1,1.2 Transformation de Fourier.

$$(1,1) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega;$$

$$(1,2) \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

La fonction $f(t)$, étant supposée à variation bornée, conduit à une fonction $F(\omega)$ donnée par l'équation (1,2). Si l'intégrale (1,1) existe, cette intégrale représente effectivement la fonction $f(t)$, initialement donnée en tout point où celle-ci est continue.

1,1.3 Analyse harmonique.

Le sens de l'expression « faire l'analyse harmonique d'un échantillon » doit être précisé. Le phénomène existait généralement avant le début de l'enregistrement et s'est prolongé après, avec des valeurs non constamment nulles. Pour l'analyse harmonique, on considère que cet enregistrement [et même bien souvent une fraction de cet enregistrement correspondant à la « base » de l'appareil analyseur utilisé ⁽¹⁾], constitue *une période d'un phénomène périodique*. Donc, faire l'analyse harmonique de cet enregistrement signifie faire l'analyse harmonique d'un enregistrement *dont une période serait représentée par cet échantillon*.

Si l'on considère maintenant que le phénomène n'existait pas *avant* le début de l'enregistrement ni *après* la fin de celui-ci (valeurs constamment nulles), on peut calculer *l'intégrale de Fourier* : son sens est alors rigoureusement représentatif de l'enregistrement complet (enregistrement plus valeurs nulles avant et après).

Par contre, si dans les mêmes conditions on cherche un développement en série de Fourier correspondant à la fonction $f(t)$, la somme de cette série ne représente la

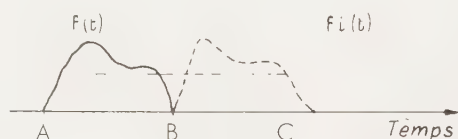


Fig. 1

fonction $f(t)$ que dans l'intervalle de définition non nulle de $f(t)$. En dehors (fig. 1) de cet intervalle AB, au point C, par exemple, la somme de cette série représente la valeur $f_i(t)$, ordonnée d'une courbe $f(t)$, décalée d'un nombre entier d'intervalles de temps correspondant à la « période » de la courbe.

On peut aussi développer une partie seulement d'une fonction quelconque. Il est alors indispensable de préciser *l'intervalle* dans lequel le développement sera valable.

1,1.4 Transformation de Fourier dans le plan complexe.

C'est à partir d'elle que nous introduirons la transformation de Laplace.

Supposons que $f(t)$ soit telle qu'elle ait une valeur constamment nulle de $-\infty$ à $t = 0$ et qu'elle soit à variation bornée et à une seule détermination dans l'intervalle $t = 0, t = \infty$.

Généralement, il existe un nombre réel positif c tel que :

$$(1,3) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t |f(t)| e^{-ct} dt$$

soit finie.

(1) Base égale à 360 mm ou 400 mm dans les appareils Coradi à sphères.

L'équation (1,1) opérant sur la fonction donne :

$$(1,4) \quad \int_0^{\infty} [f(t) e^{-ct}] e^{-j\omega t} dt = F(c, \omega).$$

Le module de convergence absolue est défini par la limite inférieure c_0 de l'ensemble des valeurs c telle que (1,3) soit finie.

La transformation inverse s'écrit :

$$(1,5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(c, \omega) e^{jt\omega} d\omega = f(t) e^{-ct}, \\ t \geq 0. \end{array} \right.$$

L'équation et la condition sont *indissociables*.

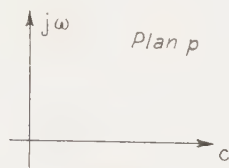


Fig. 2

On peut aussi écrire l'équation (1,4) :

$$(1,6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\infty} f(t) e^{-(c-j\omega)t} dt = F(c-j\omega), \\ c \geq c_0. \end{array} \right.$$

La transformation inverse devient alors :

$$(1,7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(c+j\omega) e^{(c+j\omega)t} d(c+j\omega) = f(t), \\ c \geq c_0, \\ t \geq 0. \end{array} \right.$$

1,1.5 Transformation de Laplace.

Soit $p = c + j\omega$ une variable complexe du plan p (fig. 2). La condition relative au module de convergence devient maintenant :

$$\Re(p) > c_0 \quad (\Re : \text{partie réelle}).$$

L'autre condition $t \geq 0$ sera satisfaite, si l'on suppose $f(t)$ telle que :

$$f(t) = 0 \quad \text{pour} \quad t < 0;$$

les équations de transformations de Laplace s'écrivent :

$$(1,8) \quad \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = F(p),$$

$$\Re(p) > c_0,$$

$\Re(p)$ signifiant « partie réelle de p »;

$$(1,9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) e^{pt} dp = f(t), \\ \Re(p) > c_0, \\ t \geq 0. \end{array} \right.$$

Enfin, on notera que dans les cas où c_0 est un nombre négatif, on peut prendre $\Re(p) = 0$ et les équations (1,8) et (1,9) deviennent :

$$(1,10) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = F(j\omega);$$

$$(1,11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = f(t), \\ t \geq 0. \end{array} \right.$$

1,1.6 Définitions relatives aux systèmes asservis.

Nous introduisons la notion de système asservi à partir de la notion de puissance.

Un système asservi est un système dans lequel la puissance, provenant d'une source d'énergie, à caractéristiques connues, est contrôlée de telle façon que l'organe commandé suive dans des conditions d'erreurs déterminées (erreur minimum, erreur moyenne quadratique minimum, etc.) un ordre (ou signal, ou message) à niveau d'énergie très faible.

Cette définition, complète en elle-même, doit être illustrée par les considérations physiques suivantes :

— l'organe commandé sera en général un système présentant une masse, une inertie, des frottements, des forces de rappel et de couplage non négligeables. L'organe de puissance ⁽¹⁾, accouplé à cet organe commandé, possède toujours une inertie non négligeable, parfois supérieure à celle de l'organe commandé lui-même. Dans ces conditions, la fréquence de résonance du système composé de ces deux organes est, en général,

(1) Moteur électrique à courant continu, diphasé, triphasé, moteur hydraulique rotatif ou linéaire, moteur pneumatique, moteur magnétique, embrayages sec ou oléao-magnétiques, etc. Dans cet organe, nous incluons également les trains d'engrenages ou les leviers.

inférieure à 100 Hz, et la plupart du temps comprise entre 0,2 et 20 Hz; c'est le cas des tourelles de canons de marine, des canons de D.C.A., des pilotes automatiques d'avion, des servomécanismes de machines à reproduire.

Considérons un système (organe commandé et organe de puissance) ayant une fréquence de résonance égale à 10 Hz. Si la grandeur contrôlée est la position de cet organe à chaque instant, on sait qu'il y a un déphasage de 180° entre la position du système et la force excitatrice supposée sinusoïdale, lorsqu'on atteint la fréquence de résonance. De plus, la caractéristique « amplitude fréquence » présente un maximum pour cette fréquence, suivant les systèmes, ce maximum est aplati ou aigu mais, de toute façon, pour les fréquences d'excitations voisines de cette fréquence de résonance, l'amplitude et la phase de la position de l'organe commandé sont différentes de ce qui est recherché : rapport d'amplitude égal à 1, déphasage nul, et sont essentiellement fonction de la fréquence de l'excitation (1).

On peut mesurer l'erreur à chaque instant et agir sur l'organe de puissance par une fonction de cette erreur. Le système ainsi constitué présente une boucle; c'est un

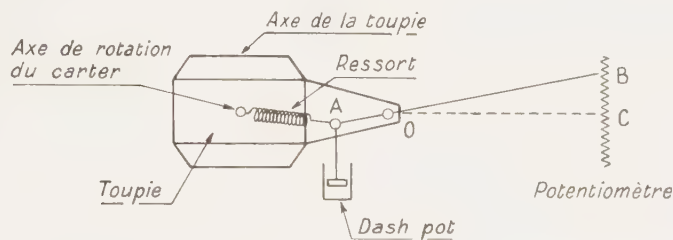


Fig. 3

système asservi et l'expérience montre que, pour un organe à commander donné, on accroît la fréquence d'excitation maximum et la précision en créant une boucle. Enfin, un système asservi constitue nécessairement un amplificateur de puissance. Un microphone de téléphone émet en moyenne une puissance de l'ordre du milliwatt. La puissance nécessaire à la réception dans un écouteur ordinaire est de l'ordre de quelques dixièmes de microwatt. Il y a diminution du niveau d'énergie, ce système ne constitue plus un système asservi, bien que de nombreux éléments (réseaux correcteurs) et beaucoup d'idées soient communs aux systèmes asservis (chaîne fermée) et aux systèmes en chaîne ouverte.

DIFFÉRENTS ÉLÉMENTS.

En plus de l'organe commandé, accouplé à un organe de puissance, nous trouverons nécessairement un organe détecteur ou organe de comparaison. Il peut être en évidence en tant qu'organe physique ou noyé dans un ensemble d'autres organes : c'est le cas d'un gyromètre portant sur le bras mobile un système mécanique (fig. 3) à avance de phase (2). Le potentiomètre, monté à l'extrémité du levier articulé AOB et lié à la cellule de l'avion, n'indique pas l'erreur, due à la rotation de l'avion lorsque celui-ci est « asservi »

(1) Pour un système linéaire.

(2) Gyropole E.C.A.

à voler en ligne droite, mais une fonction de l'erreur assez complexe; la fonction de transfert ⁽¹⁾ (rapport des transformées de Laplace de la sortie et de l'entrée, pour des conditions initiales nulles) calculée et vérifiée expérimentalement est :

$$\begin{aligned}\frac{2}{\varphi} &= k \frac{p+1}{p^2 + 2\xi p + \omega^2}, \\ k &\simeq 5 \text{ mm/8}^\circ, \\ \omega^2 &\simeq 3\,600, \\ \xi &= 0,1 \text{ à } 0,2.\end{aligned}$$

On rencontre également des « systèmes correcteurs » isolés en tant que système physique : ces systèmes sont soit des réseaux électriques, soit des ensembles mécaniques comme celui signalé ci-dessus.

Il peut également y avoir plusieurs boucles et la distinction entre boucle principale et boucles auxiliaires (ou boucles internes) n'est pas toujours possible.

1,1.7 Deux types de systèmes asservis.

Ces deux types se différencient par la nature du signal d'entrée qu'ils sont supposés suivre.

SYSTÈMES ASSERVIS REPRODUCTEURS.

La fonction d'entrée, encore appelée « message », est connue *a priori*, au moins dans un intervalle de temps futur adjacent à l'instant présent. La fonction d'entrée peut être matérialisée par une courbe dans le plan ou dans l'espace (ou une surface). La correspondance sortie/entrée doit être l'égalité dans l'espace, mais le variable temps n'intervient pas directement.

L'exemple à prendre est celui d'une machine-outil (fraiseuse ou tour) à reproduire, le profil est connu grâce au modèle. Il y a nécessité d'introduire un système asservi pour les deux raisons suivantes :

— le niveau d'énergie disponible sur le profil est faible et l'on ne peut pas toujours conduire directement l'outil par un système articulé palpant le profil;

— l'homogénéité du métal, les quantités de matières à enlever, l'usure de l'outil sont autant de perturbations à caractère aléatoire qu'il faut minimiser.

SYSTÈMES ASSERVIS STRICTEMENT ALÉATOIRES.

Ce sont ceux où l'entrée du système (message) est une fonction aléatoire (dont les propriétés statistiques seront généralement connues), comme exemple typique nous avons tout système de poursuite automatique d'un but (le mouvement de celui-ci étant supposé aléatoire). Mais ce type de système asservi englobe une sous-classe beaucoup plus importante : celle où l'ordre étant connu ou non, les perturbations sont à niveau

(1) Définie au paragraphe 1,1.8.

d'énergie élevé et risquent d'introduire une instabilité totale. C'est le cas des régulateurs et, en particulier, du pilote automatique d'avion. Nous considérerons donc que lorsque l'ordre est invariant, le système asservi a pour but principal de créer des couples opposés à ceux résultants de la somme des perturbations. Le système devient alors un système asservi classique où l'entrée est une fonction aléatoire égale et de signe contraire à la fonction somme des perturbations.

Nous étudierons uniquement ce second type de système asservi. Dans le premier type on connaît ⁽¹⁾ à chaque instant non seulement la grandeur de la fonction d'entrée, mais aussi toutes ses *dérivées*, tant à l'instant présent qu'à des instants futurs (ou passés).

La variable temps n'intervenant pas du fait que l'on dispose de la fonction d'entrée, on peut imaginer une série de systèmes asservis, la fonction d'entrée du second étant la courbe d'erreur entre le profil à reproduire et le profil obtenu après la première « passe ». Le profil joue ici le rôle des « mémoires » des machines à calculer mais, ici, c'est une mémoire susceptible d'accumuler une quantité d'information aussi grande que l'on veut (courbe continue).

Pour conclure ce paragraphe, nous rappellerons qu'il y a toujours lieu de faire un bilan d'énergie dans l'étude de ces systèmes asservis : ce bilan met en évidence les deux classes que nous venons de mentionner.

1.1.8 Fonctions de transfert des systèmes asservis.

Considérons un élément tel qu'un quadripôle électrique linéaire. Si l'on suppose le quadripôle excité par un signal pur sinusoïdal, on montre que le rapport complexe de la réponse du quadripôle à l'entrée est une fonction de la fréquence ω du signal excitateur. Ce rapport, indépendant de l'amplitude (hypothèse de linéarité), est caractéristique du quadripôle.

Plus généralement, entre l'intégrale de Fourier $F_e(\omega)$ d'un signal d'entrée et l'intégrale Fourier $F_s(\omega)$ du signal sortant du quadripôle, existe la relation suivante :

$$(1,12) \quad G(\omega) = \frac{F_s(\omega)}{F_e(\omega)}.$$

Cette relation fondamentale montre que $G(\omega)$ ne dépend pas de la fonction d'entrée, mais est caractéristique du quadripôle.

En général, on considère des signaux ayant un début et on place l'origine des temps à cet instant. Par contre, théoriquement tout au moins, le signal d'entrée du quadripôle s'étend jusqu'à $t = \infty$; si l'on ne s'occupe pas des temps antérieurs à $t = 0$, tout l'intervalle $(0, +\infty)$ doit être considéré. Dans ces conditions, en vertu de la remarque qui conduisit à l'équation (1,8) on peut utiliser les transformées de Laplace. La fonction de transfert est encore définie comme le rapport des transformées de Laplace du signal de sortie à celui d'entrée.

On notera que dans la transformation de Laplace, l'instant initial, le début des enregistrements, par exemple, présente un *rôle particulier* : tous les instants ultérieurs

(1) On on peut toujours imaginer des dispositifs permettant de connaître.

sont comptés à partir de cette origine et le passé, par rapport à cette origine, ne présente pas d'intérêt. Or, l'intervalle couvert par l'intégrale de Fourier est $(-\infty, +\infty)$ et le positionnement *dans le temps* d'une impulsion, par exemple, ne peut se faire qu'en fixant une origine, quelconque d'ailleurs, dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. Si l'on décide de prendre cette référence de telle façon que l'abscisse des temps caractérisant l'instant auquel a lieu l'impulsion soit *positive* ou nulle (condition extrêmement peu restrictive), on peut utiliser les transformées de Laplace, groupe dans lequel l'instant initial $t = 0$ joue un rôle privilégié mais qui ne concerne que la partie $t \geq 0$ des phénomènes. La convergence des intégrales est, de ce fait, plus simple à établir.

Les principales propriétés ⁽¹⁾ de la transformation de Laplace sont :

— linéarité;

— différentiation et intégration dans l'espace des temps, si $f(t)$ a pour transformée $F(p)$; transformée de :

$$(1,13) \quad \begin{aligned} \frac{df(t)}{dt} &= p F(p) - f(0_+) = \mathcal{L} \left[\frac{df(t)}{dt} \right]; \\ \mathcal{L} \left[\int_0^t f(t) dt \right] &= \frac{F(p)}{p} + \frac{f^{-1}(0_+)}{p}, \end{aligned}$$

$f(0_+)$ = valeur de f à l'instant $t = 0$, considérée comme limite de $f(\varepsilon)$ ou $\varepsilon \rightarrow 0$ par valeurs positives;

$f^{-1}(0_+)$, primitive de $f(t)$ prise pour 0_+ ;

— différentiation et intégration dans le domaine complexe, on a :

$$(1,14) \quad \frac{dF(p)}{dp} = \mathcal{L} [tf(t)];$$

$$(1,15) \quad \int F(p) dp = \mathcal{L} \left[\frac{f(t)}{t} \right];$$

— changement d'échelle :

$$(1,16) \quad \mathcal{L} \left[f\left(\frac{t}{a}\right) \right] = aF(ap);$$

— translation dans l'espace des temps :

$$(1,17) \quad \begin{cases} \mathcal{L} [f(t-a)] = e^{-ap} F(p), \\ f(t-a) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 < t < a; \end{cases}$$

$$(1,18) \quad \begin{cases} \mathcal{L} [f(t+a)] = e^{ap} F(p), \\ f(t+a) = 0 \quad \text{pour} \quad -a < t < 0; \end{cases}$$

(1) Propriétés énumérées dans l'ouvrage de P. NASLIN [1].

— translation dans le domaine complexe :

$$(1,19) \quad \mathcal{L} [e^{-at} f(t)] = F(p+a);$$

$$(1,20) \quad \mathcal{L} [e^{at} f(t)] = F(p-a);$$

— valeur finale et valeur initiale :

$$(1,21) \quad \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t);$$

$$(1,22) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t);$$

— multiplication dans le domaine complexe ou produit de composition dans le domaine des temps (convolution) :

$$(1,23) \quad \mathcal{L}^{-1} [F_1(p) F_2(p)] = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau;$$

— multiplication dans le domaine des temps ou produit de composition dans le domaine complexe :

$$(1,24) \quad \mathcal{L} [f_1(t) f_2(t)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} F_1(p-w) F_2(w) dw;$$

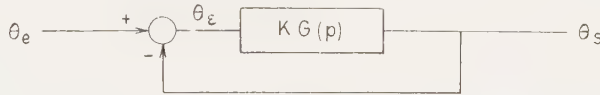


Fig. 4

— commutativité de $\mathcal{L}$ avec $\mathcal{R}$ et $\mathcal{J}$:

$$(1,25) \quad \mathcal{L} [\mathcal{R} [f(t)]] = \mathcal{R} [F(p)];$$

$$(1,26) \quad \mathcal{L} [\mathcal{J} [f(t)]] = \mathcal{J} [F(p)].$$

Enfin, on rappelle que, sous réserve que les *conditions initiales soient nulles* et que le couplage entre deux éléments placés en série ne modifie pas les répartitions des intensités ou de leurs analogues mécaniques, la fonction de transfert de l'ensemble est égale au produit des fonctions de transfert de chacun des éléments.

1,1.9 Différentes fonctions de transfert d'un système asservi.

Les relations fondamentales (fig. 4) sont :

$$(1,27) \quad \theta_\varepsilon(p) = \theta_e(p) - \theta_s(p);$$

$$(1,28) \quad \frac{\theta_s(p)}{\theta_\varepsilon(p)} = KG(p);$$

$$(1,29) \quad \frac{\theta_s(p)}{\theta_e(p)} = \frac{KG}{1 + KG}.$$

1.2 STABILITÉ DES SYSTÈMES ASSERVIS — DÉFINITION CLASSIQUE

DÉFINITION DES STATISTIQUES

1.2.1 Définition classique.

La critère de Nyquist, déduit directement du théorème de Cauchy, permet de savoir si un système est stable ou dans quels cas il peut l'être.

Nous renvoyons aux ouvrages traitant les systèmes asservis [1] ⁽¹⁾, [2], [3], pour la définition de la stabilité et l'énoncé du critère. Nous soulignons seulement que l'application de ce critère, qui ne présente pas de difficulté, doit être faite consciencieusement. Il ne faut pas, en particulier, oublier que l'indication directe de ce critère concerne la *différence* entre le nombre de pôles et le nombre de zéros dans le demi-plan de droite de la fonction de transfert considérée.

Le tracé dans le plan complexe de la fonction de transfert montre alors qu'il faut intercaler, dans la chaîne, des éléments correcteurs, de façon que le nombre de tours de la courbe autour du point — 1 soit correct et que, pour s'assurer une certaine marge de stabilité, la courbe passe suffisamment loin du point — 1.

En général, on trouve qu'il faut ajouter un circuit à « avance de phase », nous allons préciser quelques-unes de ses propriétés.

Raisonnons sur un exemple : prenons un pilote automatique d'avion. En l'absence de données plus précises, on impose comme condition que la réponse du système « avion + pilote » soit correcte pour des sollicitations de fréquence égale à 3 Hz. Cela veut dire que le rapport des amplitudes $\frac{\theta_s}{\theta_e}$ doit être voisin de 1 et que le déphasage entre θ_s et θ_e doit être faible, disons inférieur à 10°. (Il est à prévoir que ce seront 10° de « retard » de phase.)

L'avion, système passif, est nécessairement en retard de phase pour des sollicitations sinusoïdales sur la gouverne. On augmentera la fréquence pour laquelle ce déphasage deviendra 10°, en mettant un circuit à *avance de phase* dans la chaîne; pour des sollicitations sinusoïdales, et *seulement pour elles*, on pourra calculer la phase résultante, somme de tous les déphasages des différents éléments. Mais si l'excitation n'est plus sinusoïdale, mais périodique ou aléatoire, on ne peut plus parler d'une avance de phase. Précisons ce point.

1.2.2 Circuit à avance de phase.

Il peut paraître curieux, de prime abord, qu'un système physique puisse donner un signal de sortie en avance dans le temps par rapport au signal d'entrée. Pour une excitation sinusoïdale, le décalage (avance de phase) est constant et caractéristique de la fréquence excitatrice, dès que l'état transitoire est passé. Pour une excitation aléatoire faisant partie d'une fonction aléatoire, on peut calculer et réaliser un réseau prédicteur donnant une erreur quadratique minimum [4].

(1) Les nombres entre crochets renvoient aux références bibliographiques.

On pourrait penser, qu'en fait, il s'agit d'un retard de $360^\circ - \alpha$, α étant l'avance de phase.

Ce point de vue est difficilement soutenable, étant donné que si l'on suit le phénomène depuis l'instant initial et si l'on attache la notion de phase à celle de *position des « zéros »* de la réponse par rapport à ceux de l'entrée, on trouve en général une « avance de phase » dès l'instant initial.

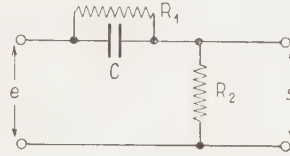


Fig. 5

En effet, prenons le cas du circuit, représenté *figure 5*, classiquement connu sous le nom de circuit à avance de phase.

Appliquons, à l'instant $t = 0$, un signal tel que :

$$e = \sin \omega t.$$

On sait que la fonction de sortie est la somme de la réponse forcée :

$$s = A \sin (\omega t + \varphi),$$

où φ est l'avance de phase et d'une exponentielle décroissante correspondant à l'état transitoire (*fig. 6*).

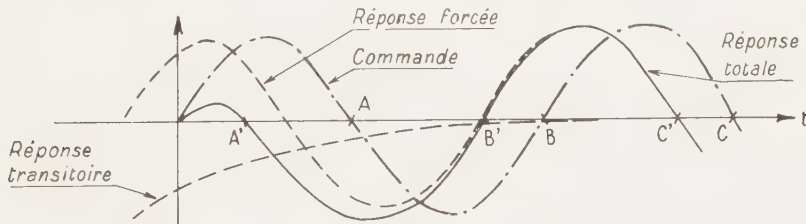


Fig. 6

Quelle que soit l'avance de phase recherchée, on voit que les zéros de la fonction de sortie : A' , B' , ..., seront toujours *en avant* par rapport à ceux de la fonction d'entrée A , B , C ,

Ce fait n'est pas cependant universel. Nous avons cherché à préciser dans quels cas cette propriété est vérifiée.

Prenons, en premier lieu, le cas d'une entrée constituée par une fonction linéairement croissante, n'ayant pas une valeur nulle à l'origine :

$$(1,30) \quad e = A + Bt.$$

L'équation différentielle du circuit précédemment représenté est :

$$(1,31) \quad \frac{ds}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} s = \frac{de}{dt} + \frac{1}{R_1 C} e,$$

où :

$$(1,32) \quad \frac{ds}{dt} + \frac{1}{\tau} s = \frac{de}{dt} + \frac{1}{a \tau} e,$$

où :

$$a = \frac{R_1 + R_2}{R_2} \quad \tau = \frac{R_2}{R_1 + R_2} R_1 C.$$

La fonction de sortie est donnée par l'intégrale générale de l'équation (1,32) :

$$(1,33) \quad s(t) = \alpha + \beta t + k e^{-\frac{t}{\tau}},$$

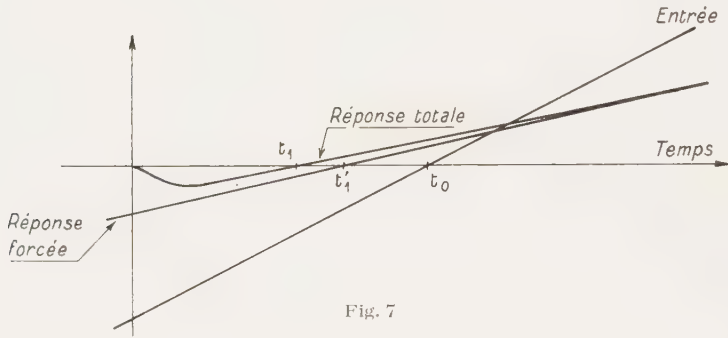


Fig. 7

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = B \frac{a-1}{a} \tau + \frac{A}{a}, \\ \beta = \frac{B}{a}. \end{array} \right.$$

La seule donnée initiale imposée est :

$$s(0) = 0,$$

donc :

$$(1,34) \quad s(t) = \alpha \left(1 + e^{\frac{\tau}{t}} \right) + \beta t;$$

si, en particulier, $A < 0$ $B > 0$, la fonction d'entrée coupe alors l'axe des temps au temps $t_0 = -\frac{A}{B}$.

La fonction de sortie présentera un zéro avant ce dernier instant si, et seulement si, $s'(0)$ est négatif.

La réponse forcée, indiquée sur la figure 7, coupe, en effet, l'axe des temps à l'instant :

$$t'_1 = (1 - a) \tau + t_0 < t_0,$$

où :

$$(1,35) \quad s'(0) = B + \frac{A}{a\tau};$$

donc :

$$-\frac{A}{B} + t_0 > a\tau, \quad s'(0) < 0,$$

$$-\frac{A}{B} + t_0 \leq a\tau, \quad s'(0) \geq 0;$$

si $t_0 > a\tau$, on a toujours la disposition de la *figure 7* avec, en particulier :

$$t_1 < t'_1 < t_0.$$

On peut préciser la forme des réponses en étudiant $s'(t)$ et $s''(t)$:

$$(1,36) \quad \frac{1}{\beta} s'(t) = \left(a - 1 - \frac{t_0}{\tau}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} + 1;$$

$$(1,37) \quad \frac{1}{\beta} s''(t) = \frac{1}{\tau} \left(\frac{t_0}{\tau} - a + 1\right) e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

On a les trois cas suivants (*fig. 8*) :

$$a) \quad \text{si} \quad t_0 > a\tau,$$

$e_s(t)$ décroît, passe par un minimum, puis croît :

$$b) \quad (a - 1)\tau < t_0 \leq a\tau,$$

$e_s(t)$ croît dès $t = 0$;

$$s'(0) < 0;$$

$$s''(t) < 0;$$

$$c) \quad t_0 \leq (a - 1)\tau.$$

Il n'y a plus de régime transitoire, la réponse est :

$$s(t) = \frac{B}{a} t;$$

$$d) \quad t_0 < (a - 1)\tau,$$

$s(t)$ croît à partir de $t = 0$;

$$s'(0) > 0 \quad \text{mais} \quad s''(0) < 0.$$

Nous avons également traité le cas où l'entrée est une sinusoïde quelconque :

$$e = E \sin(\omega t + \varphi).$$

Le calcul confirme les solutions graphiques qui montrent que, suivant la valeur de φ , on peut obtenir (pour un circuit donné) une correspondance bi-univoque entre les « zéros » de la fonction d'entrée et ceux de la fonction de sortie, ou, au contraire, « manquer » le premier passage à zéro de la fonction d'entrée.

Afin de ne pas alourdir le chapitre, nous avons reporté ces calculs à l'Annexe I.

De toute façon, on attire l'attention sur le fait qu'un système à minimum de phase (c'est le cas ici) ne donne une réponse qui part dans le même sens que la cause excitatrice que pour une sollicitation en *échelon unité* : l'exemple précédent a montré

qu'une excitation linéairement croissante (ou décroissante) ne conduisait pas nécessairement à une dérivée initiale de la fonction de sortie du même signe que la grandeur de la fonction d'entrée à l'instant initial.

Il en est de même pour une excitation sinusoïdale telle que $e(0) \neq 0$, voir Annexe I.

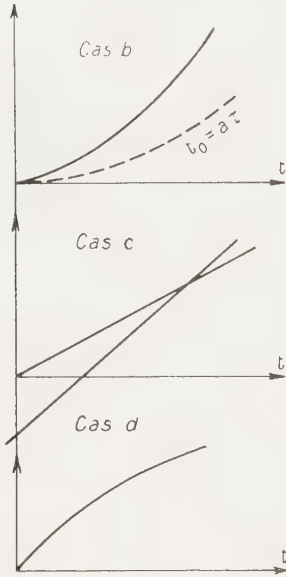


Fig. 8

1,2,3 Application.

Supposons qu'un tel circuit doive être, en utilisation normale, commuté à intervalles de temps égaux ou non sur une entrée constituée par une fonction aléatoire stationnaire dont on représentera une épreuve par $f(t)$. Tout système à « échantillonnage » (sampling system) entre dans cette catégorie. Par simplification, nous supposons qu'avant la commutation la sortie du système est remise à zéro (conditions initiales nulles). Si l'information transmise par la fonction d'entrée est liée à la fréquence locale, on voit qu'on ne perdra pas d'information par suite de

l'introduction du circuit à « avance de phase » si, quel que soit le rang de la commutation, on a ⁽¹⁾ :

$$(1,38) \quad -\frac{f(t)}{f'(t)} > a \tau.$$

La correspondance entre les zéros et la fonction d'entrée et ceux de la fonction de sortie, dans l'exemple considéré, sera alors bi-univoque (et les zéros de la fonction de sortie seront en avance par rapport à ceux de la fonction d'entrée).

Multipliant (1,38) par $f'^2(t)$ des deux côtés de l'inégalité, on obtient :

$$(1,39) \quad -f(t) f'(t) > a \tau f'^2(t).$$

(1) On confond la courbe et sa tangente. L'approximation serait bonne dans le cas d'un radar de surveillance, balayant l'espace à différentes vitesses, ce balayage s'effectuant par paliers de vitesse (c'est l'exemple donné p. 300 dans l'ouvrage de JAMES, NICHOLS and PHILIPPS [3]).

Cette inégalité sera vérifiée « en moyenne » pour la fonction aléatoire, si :

$$(1,40) \quad -\overline{f(t)f'(t)} > a \tau \overline{f'^2(t)}.$$

Désignons par $\varphi(\tau)$ la fonction d'autocorrélation de $f(t)$:

$$(1,41) \quad \varphi(\tau) = \overline{f(t)f(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t)f(t+\tau) dt.$$

Dérivons par rapport à t l'équation (1,41) (en faisant l'hypothèse que $f(t)$ est une fonction à carrés sommables) :

$$(1,42) \quad \varphi'(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t)f'(t+\tau) d\tau.$$

En dérivant une nouvelle fois, on obtient :

$$(1,43) \quad \varphi''(\tau) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f'(t)f'(t+\tau) d\tau$$

et, en particulier :

$$(1,44) \quad \varphi'(0) = \overline{f(t)f'(t)};$$

$$(1,45) \quad \varphi''(0) = -\overline{f'^2(t)},$$

d'où, en revenant à (1,40), on déduit que la propriété recherchée (correspondance des zéros et avance du zéro de la fonction de sortie par rapport à la fonction d'entrée) sera vraie en moyenne, si :

$$(1,46) \quad \varphi'(0) > -a \tau \cdot \varphi''(0).$$

1,2,4 Énergie délivrée par le circuit.

Jusqu'ici nous avons considéré que l'information à transmettre était liée aux passages à zéro de la fonction aléatoire. (Il en est souvent ainsi, lorsqu'il s'agit de reconnaître la fréquence locale ⁽¹⁾ d'un signal périodique, dont la fréquence varie lentement, lorsque le signal est noyé dans un bruit intense.)

Il est alors indiscutable qu'un tel circuit est bien à *avance* de phase.

Par contre, il est physiquement évident que, du point de vue énergétique, l'énergie délivrée par le circuit ne peut être qu'inférieure à l'énergie fournie, quel que soit l'instant considéré.

Nous avons vérifié que :

$$\int_0^t e^2(t) dt - \int_0^t s^2(t) dt$$

(1) Synonyme de l'expression impropre : fréquence instantanée.

était toujours positif et nous avons calculé, dans un cas particulier, celui de l'avance de phase maximum, cette différence. Le résultat est reproduit sur le graphique de la figure 9, il correspond au cas où le signal est :

$$\begin{aligned} e &= E \sin \omega t & \text{si} & \quad t > 0, \\ e &= 0 & \text{si} & \quad t \leq 0. \end{aligned}$$

1,2.5 Critère de stabilité dans le cas d'un signal aléatoire.

Il est bien évident que nous n'excluons pas toute analyse harmonique concernant le signal d'entrée, au contraire, l'analyse de quelques échantillons extraits d'un long enregistrement d'un signal type (1) peut donner une idée des « fréquences maxima » mises en jeu. Comme nous l'avons dit dans l'introduction, nous voulons montrer ici qu'il est possible de calculer un système asservi, *directement à partir d'un signal type*, avec des performances supérieures au calcul classique.

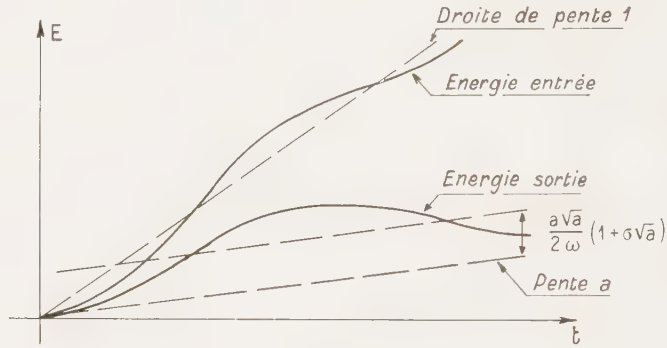


Fig. 9

Nous attachons la notion de stabilité à la notion d'accrochage des alternateurs ou des moteurs synchrones soumis à des charges variables. Soit $f_e(t, E)$ une fonction aléatoire représentant l'entrée d'un système. Nous considérons un échantillon de cette fonction aléatoire, échantillon que nous noterons $f_e(t)$; soit $f_s(t)$ la réponse à cette fonction d'un élément. La fonction de corrélation mutuelle :

$$(1,47) \quad \varphi_{es}(\tau) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f_e(t) f_s(t + \tau) dt$$

exprime la corrélation qui existe entre la sortie et l'entrée pour chaque valeur de τ . Comme on pouvait s'y attendre, la notion de phase a disparu, celle d'amplitude subsiste. Cependant, cette fonction contient autant d'information qu'une courbe d'impédance (2) tracée dans le plan complexe, mais utilisée pour une fréquence (à cette fréquence

(1) Exemple : signal de sortie d'un radar de poursuite considéré comme signal d'entrée pour le système de pointage du canon de D.C.A.

(2) Synonyme, ici, de fonction de transfert.

correspond alors un rapport d'amplitude : module du vecteur et un déphasage : phase du vecteur). En effet :

a) la fonction $\varphi_{es}(\tau)$ présente en général un maximum, la valeur de τ , pour laquelle ce maximum a lieu $\tau = \tau_1$, correspond au décalage dans le temps (en avant ou en retard) pour lequel la corrélation sortie/entrée est maximum (notion équivalente au *déphasage* pour une fréquence; ici, « déphasage » moyen pour un signal);

b) la valeur de ce coefficient de corrélation indique avec quelle fidélité, en moyenne, la sortie reproduit l'entrée (notion équivalente au rapport des amplitudes).

Enfin, on peut démontrer que la valeur maximum de cette fonction de corrélation est égale à la demie somme des fonctions d'autocorrélation des deux fonctions.

En effet, partons de :

$$[f_e(t) \pm f_s(t + \tau)]^2 \geq 0$$

et développons le carré :

$$f_e^2(t) + f_s^2(t) \pm 2 f_e(t) f_s(t + \tau) \geq 0,$$

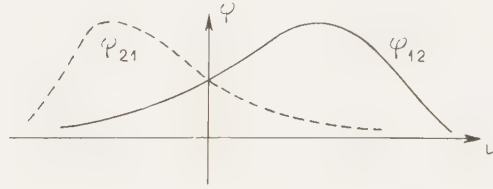


Fig. 10

c'est-à-dire :

$$(1,48) \quad \varphi_{ee}(0) + \varphi_{ss}(0) \geq 2 \varphi_{es}(\tau),$$

on notera au passage que, d'une manière générale (*fig. 10*) :

$$\varphi_{12}(u) = \varphi_{21}(-u),$$

ce qui se traduit graphiquement par une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées :

On note donc que, si :

$$\varphi_{12}(\tau) \leq \varphi_{11}(0) + \varphi_{22}(0),$$

$$\varphi_{21}(\tau) \leq \varphi_{11}(0) + \varphi_{22}(0),$$

et que :

$$\varphi_{12}(0) = \varphi_{12}(0).$$

Ces inégalités montrent donc que la fonction de corrélation mutuelle $\varphi_{es}(\tau)$ reste bornée, si $\varphi_{ee}(0)$ et $\varphi_{ss}(0)$ le sont. Or, ces valeurs de la fonction de corrélation, prises pour une valeur nulle de l'argument, correspondent à la valeur moyenne de l'énergie liée au signal. Par hypothèse, $\varphi_{ee}(0)$ est finie $\varphi_{ss}(0)$ l'est certainement en théorie, puisqu'il s'agit d'un système physique; mais si l'on considère la stabilité au

sens des radioélectriciens ou des mécaniciens, nous devons *limiter la valeur maximum* $\varphi_{ss}(0)$ du signal de sortie, lorsque le signal d'entrée est une fonction aléatoire dont les propriétés statistiques sont connues. Le cas le plus général correspondant évidemment à un signal d'entrée à spectre voisin d'un spectre uniforme, c'est-à-dire à un bruit blanc.

Développons ce dernier point. Nous allons démontrer que si l'on sait que $\varphi_{ss}(0)$ est bornée lorsque le signal d'entrée à un spectre connu, on peut affirmer que $\varphi_{ss}(0)$ est bornée dans tous les cas où l'entrée correspond à un signal dont le spectre a le même comportement à l'infini et les mêmes zéros. Ce résultat n'est valable que pour les systèmes linéaires.

En effet, d'après un résultat fondamental établi par KINTCHINE, à savoir que la fonction d'autocorrélation $\varphi(\tau)$ d'une fonction aléatoire stationnaire $f_e(t)$ et le spectre de densité d'énergie $\Phi(\omega)$, sont transformées de Fourier l'une de l'autre :

$$(1,49) \quad \varphi_{ss}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{ss}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega;$$

$$(1,50) \quad \Phi_{ss}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{ss}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau;$$

on déduit :

$$(1,51) \quad \varphi_{ss}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{ss}(\omega) d\omega = \overline{f_e(t)^2}.$$

D'autre part, les spectres $\Phi_{ss}(\omega)$ et $\Phi_{ee}(\omega)$ sont liés à la fonction de transfert $H(\omega)$ du circuit par (1) :

$$(1,52) \quad \Phi_{ss}(\omega) = |H(\omega)|^2 \Phi_{ee}(\omega),$$

donc :

$$(1,53) \quad \varphi_{ss}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 \Phi_{ee}(\omega) d\omega.$$

(1) En effet, soient $f_e(t)$ et $f_s(t)$ les fonctions d'entrée et de sortie du circuit dont la fonction de transfert est $H(\omega)$; si $h(t)$ est la réponse impulsionnelle du circuit, on a :

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt.$$

On calcule ensuite la fonction d'autocorrélation de la fonction de sortie :

$$\begin{aligned} \varphi_{ss}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f_s(t) f_s(t + \tau) dt, \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} dt \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) f_e(t - \alpha) d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} h(\beta) f_e(t + \tau - \beta) d\beta, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} h(\beta) d\beta \varphi_{ee}(\tau - \beta + \alpha). \end{aligned}$$

La transformée de Fourier généralisée des deux membres donne :

$$\Phi_{ss}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha) d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} h(\beta) d\beta \varphi_{ee}(\tau - \beta + \alpha),$$

d'où l'on déduit :

$$\Phi_{ss}(\omega) = |H(\omega)|^2 \Phi_{ee}(\omega).$$

Cette fonction peut devenir infinie dans les cas suivants :

- a) pour $\omega = \infty$, si $|H(\omega)|^2 \Phi_{ee}(\omega)$ ne tend pas vers 0 plus vite que $\frac{1}{\omega}$;
- b) pour les pôles réels de $|H(\omega)|^2$ d'ordre inférieur à 1.

En effet, $\Phi_{ee}(\omega)$ ne peut pas avoir de pôles réels simples sinon :

$$(1,54) \quad \varphi_{ee}(\tau) = \int_0^\infty \Phi_{ee}(\omega) \cos \omega \tau d\omega$$

serait infinie au moins pour $\tau = 0$, puisque $\Phi_{ee}(\omega)$ est supposée rationnelle : ses pôles seraient donc nécessairement d'ordre supérieur à 1, donc $\varphi_{ee}(0)$ qui est égale à la valeur quadratique moyenne du signal d'entrée serait infinie, ce qui est contraire à notre hypothèse.

$\varphi_{ss}(0)$ restera donc finie si :

- a) la décroissante à l'infini de $|H(\omega)|^2 \Phi_{ee}(\omega)$ est de l'ordre de $\frac{1}{\omega^2}$;
- b) les zéros de $\Phi_{ee}(\omega)$ détruisent les pôles de $|H(\omega)|^2$.

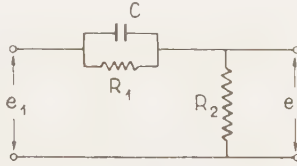


Fig. 11

Il est d'ailleurs à remarquer que $|H(\omega)|^2$ ne peut avoir que des pôles d'ordre *pair* comme $\varphi_{ee}(\omega)$ ne peut avoir que des zéros d'ordre pair, puisque c'est une fonction toujours positive.

Donc, si des signaux sont tels que leur spectre ait même comportement à l'infini et mêmes zéros, on peut affirmer qu'ils conduiront à une valeur quadratique moyenne des signaux de réponse dans un système linéaire finie.

En résumé, nous définirons la stabilité par les deux conditions suivantes :

1° pour un signal représenté par une fonction aléatoire dont les propriétés sont connues, la valeur quadratique moyenne du signal de réponse doit être finie (ou inférieure à une valeur fixée à l'avance);

2° la fonction de corrélation mutuelle entre le signal d'entrée et le signal de sortie, doit être supérieure à une valeur fixée à l'avance.

Pour que cette définition soit valable, il faut s'assurer qu'elle s'applique, en particulier, pour des signaux de commande sinusoïdaux.

Considérons d'abord un système linéaire. A une entrée sinusoïdale correspond une sortie nécessairement sinusoïdale et de même fréquence, donc caractérisée par rapport au signal d'entrée par un rapport d'amplitude et une phase.

Supposons que le système donne, pour la fréquence ω , un rapport d'amplitude θ et une avance de phase φ pour fixer les idées, reprenons le système à « avance de phase » déjà mentionné (fig. 11).

La *figure 12* représente les sinusoïdes d'entrée et de sortie.

La fonction de corrélation mutuelle est (*fig. 13*) :

$$\varphi_{12}(\tau) = \overline{y_1(t) y_2(t + \tau)} = \frac{E^2}{2} \cos(\omega \tau + \alpha).$$

La courbe présente un maximum (corrélation maximum) pour $\tau = -\alpha$ comme on pouvait le penser *a priori*.

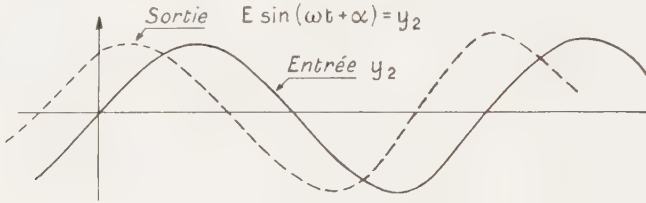


Fig. 12

Dans le cas de signaux de commande sinusoïdaux, on vérifie d'ailleurs graphiquement ce fait sans difficulté.

Pour conclure ce paragraphe, nous soulignerons que les réseaux « à avance de phase », utilisés couramment dans les servomécanismes, pourraient s'appeler « réseaux prédicteurs », lorsque le système est soumis à un ordre aléatoire (ou même périodique non sinusoïdal).

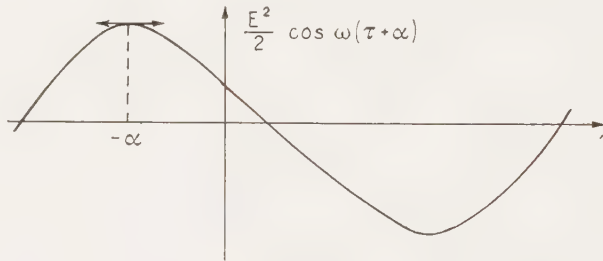


Fig. 13

1.3 REMARQUES CONCERNANT L'ANALYSE HARMONIQUE

En dehors des courants alternatifs et du mouvement des astres, et leurs conséquences (marées), les phénomènes périodiques sont rares.

La décomposition en série de Fourier ⁽¹⁾ n'est donc valable que pour une classe restreinte de fonctions et l'intégrale de Fourier doit être considérée pour tous les autres phénomènes.

(1) Le « Tide Predictor » de Lord KELVIN n'est pas un prédicteur au sens qu'on donne à ce mot depuis quelques années. Aucun phénomène aléatoire n'est considéré dans la détermination des marées à un instant futur. Il s'agit simplement de connaître la valeur d'une fonction périodique à un instant futur, distant de plusieurs périodes.

De même, un phénomène sinusoïdal, le domaine des vibrations étant exclu, est rare. D'ailleurs, la quantité d'information attachée à un signal périodique est nulle : donc, du point de vue des systèmes asservis, seuls les signaux non périodiques — au sens de l'ingénieur bien entendu, puisque pour le mathématicien un signal périodique ne saurait exister physiquement — doivent être considérés.

Le calcul *classique* des systèmes asservis sera déjà plus précis, si l'on prend soin de déterminer dès le début les spectres énergétiques des ordres auxquels le système devra obéir.

A défaut d'autocorrélateur ou d'analyseur harmonique donnant directement le spectre, il est souhaitable de faire une analyse harmonique classique sur des échantillons du signal de commande. Il ne faut cependant pas oublier que l'on obtient ainsi un spectre de *raies* et que ce spectre dépend de l'origine choisie. Il est donc recommandé d'effectuer plusieurs fois l'opération sur le même échantillon en décalant à chaque fois l'origine.

De même, la considération systématique d'échelons-unités en divers points de la chaîne ne correspond aucunement à la réalité.

L'échelon-unité ne peut exister au sens physique du mot que dans deux cas :

- connexion rapide d'un circuit à une f.é.m.;
- décision dans l'esprit d'un être humain.

Les phénomènes mécaniques tels que application instantanée d'une force, font, en réalité, intervenir l'élasticité de la matière et, à une échelle de temps correcte, le phénomène ne présente pas de dérivées infinies. Nous ne prétendons pas qu'à la même échelle de temps le phénomène électrique présente une dérivée infinie; nous noterons d'ailleurs que tous les traités de mécanique développent les « chocs et percussions », alors qu'il est quasi impossible de tenir compte d'un état transitoire dans l'*établissement de la différence de potentiel* ⁽¹⁾. La raison est, d'ailleurs, liée à la différence des vitesses de propagation des perturbations dans les solides (quelques milliers de mètres par seconde) et de la vitesse de propagation d'un potentiel dans un conducteur (300 000 km/s).

Quant au deuxième aspect : décision dans l'esprit d'un être humain, nous voulons dire, par exemple, que nous considérons la décision d'un pilote de piquer comme instantanée. Cette décision élaborée dans un centre cérébral donne lieu à un influx nerveux dont la vitesse, constante, d'ailleurs, est connue : il en résulte un *retard pur* dans l'exécution de l'ordre; puis, les organes récepteurs, les muscles, étant alertés, l'ordre se réalise progressivement, d'où une *constante de temps*. Le résultat est que la décision instantanée émanant du cerveau se manifeste *nécessairement* par un retard et une constante de temps. Il est donc absurde d'envisager un « échelon-unité » sur les gouvernes de l'avion. En admettant que le retard dû à la propagation de l'influx nerveux n'intervienne pas dans la *dynamique temporaire de l'avion*, l'accélération maximum et, par conséquent, la vitesse maximum de débattement de la commande peuvent être limités supérieurement à partir de l'effort maximum qu'un homme peut exercer.

(1) Il ne s'agit pas, bien entendu, de l'état transitoire représenté par l'établissement de l'intensité.

Si maintenant on considère le cas d'un pilote automatique, la « décision » du pilote humain est remplacée par l'ordre de virage (ordre de braquage de gouverne), constitué par la différence de potentiel — supposée appliquée instantanément — sur l'organe adéquate de la chaîne du pilote automatique. Ici encore, l'ordre le plus brutal pouvant agir sur la gouverne de l'avion est constitué par la *réponse de la gouverne* à un échelon-unité émanant du détecteur.

Il serait donc absurde de considérer, d'une part, des signaux réels par leur fonction d'autocorrélation, puis, par leur spectre, et, d'autre part, en des points de la chaîne non susceptibles d'être réellement commandés, des signaux fictifs tels que des échelons-unités.

La méthode de calcul proposée, dont la base a été la théorie de Wiener-Lee, rappelée au paragraphe suivant, doit être synthétique et inclure nécessairement la stabilité pour la classe de signaux considérés (fonction aléatoire déterminée). On pourra s'assurer de la stabilité (au sens classique) pour des signaux n'appartenant pas à la classe choisie (en particulier, échelon-unité appliqué à l'entrée du système), il est cependant possible que le système ne soit plus stable.

1.4

RAPPEL DES THÉORIES DE WIENER

Ce paragraphe résume très rapidement la méthode du professeur WIENER pour la détermination des fonctions de transfert des filtres [5]. Nous donnons la version du professeur Y.W. LEE [6] sans modification. Au chapitre suivant, relatif à l'adaptation de ces théories aux servomécanismes linéaires, nous reprendrons certains points et les préciserons.

1.4.1 Problème.

On suppose qu'on veuille « filtrer » un signal $f_e(t)$ constitué par un message $f_m(t)$ mélangé à un bruit $f_b(t)$.

Plus généralement, on suppose que le signal $f_d(t)$ qu'on désire obtenir à la sortie du circuit est le message, sans bruit, décalé d'un certain temps α :

$$f_d(t) = f_m(t \pm \alpha),$$

- $\alpha > 0$ représente un filtre *prédicteur*;
- $\alpha < 0$ représente un filtre avec retard;
- $\alpha = 0$ représente un filtre direct.

On suppose que le message et le bruit ont des propriétés statistiques invariables dans le temps, c'est-à-dire, en particulier, que leurs fonctions d'autocorrélation :

$$\varphi_{mm}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f_m(t) f_m(t + \tau) dt,$$

$$\varphi_{bb}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f_b(t) f_b(t + \tau) dt,$$

sont indépendantes de t .

Les *spectres* énergétiques sont les transformées de Fourier des fonctions d'auto-corrélation :

$$\Phi_{mm}(\omega) = \int_{-\tau}^{+\tau} e^{-j\omega\tau} \varphi_{mm}(\tau) d\tau,$$

$$\Phi_{bb}(\omega) = \int_{-\tau}^{+\tau} e^{-j\omega\tau} \varphi_{bb}(\tau) d\tau.$$

Enfin, le critère utilisé, puisque la solution idéale de ce problème :

$$f_s(t) = f_d(t)$$

($f_s(t)$ = fonction de sortie) est inconcevable pour une entrée aléatoire stationnaire (possédant une quantité d'information), est celui de la moyenne du carré de l'erreur.

1,4.2 Mise en équation.

Cette erreur s'exprime par :

$$(1,55) \quad \varepsilon = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} [f_d(t) - f_s(t)]^2 dt.$$

$f_s(t)$ s'exprime en fonction de $f_e(t)$, par la relation suivante :

$$(1,56) \quad f_s(t) = \int_0^t h(\sigma) f_e(t - \sigma) d\sigma,$$

$h(\sigma)$ étant la réponse impulsionnelle du filtre. C'est aussi la transformée de Fourier, au facteur $\frac{1}{2\pi}$ près de la fonction de transfert du filtre $H(\omega)$:

$$(1,57) \quad H(\omega) = \int_{-\tau}^{+\tau} h(\sigma) e^{-j\omega\sigma} d\sigma.$$

L'expression du carré de l'erreur, une fois développée et après interversions des ordres d'intégration, conduit à :

$$(1,58) \quad \varepsilon = \int_{-\tau}^{+\tau} h(\tau) d\tau \int_{-\tau}^{+\tau} h(\sigma) d\sigma \varphi_{ee}(\tau - \sigma) - 2 \int_{-\tau}^{+\tau} h(\tau) \varphi_{ed}(\tau) d\tau + \varphi_{dd}(0).$$

Il s'agit de déterminer $h(u)$ de telle façon que ε soit minimum.

On applique le calcul des variations à cette expression, ce qui conduit à l'équation de Wiener Hopf :

$$(1,59) \quad \int_{-\tau}^{+\tau} h(\sigma) \varphi_{ee}(\tau - \sigma) d\sigma - \varphi_{ed}(\tau) = 0 \quad \text{pour} \quad \tau \geq 0.$$

Nous insistons fortement sur le fait que « l'équation de Wiener Hopf » est constituée par une équation et une condition.

1,4,3 Solution de l'équation de Wiener Hopf.

Nous conserverons les notations du professeur Y. W. LEE et, en particulier, le plan λ qu'il utilise (*fig. 14*).

Appelons $q(\tau)$ le premier membre de l'équation (1,59) soit $Q(\lambda)$ sa transformée de Fourier :

$$(1,60) \quad Q(\lambda) = \Phi_{ed}(\lambda) - H(\lambda) \Phi_{ee}(\lambda),$$

avec la condition : $Q(\lambda)$ ne doit pas avoir de pôles dans le demi-plan supérieur.

On fait l'hypothèse que $\Phi_{ee}(\lambda)$ est rationnelle. On écrit alors :

$$(1,61) \quad \Phi_{ee}(\lambda) = \Phi^{+ee}(\lambda) \cdot \Phi^{-ee}(\lambda),$$

où $\Phi^{+ee}(\lambda)$ a ses pôles et ses zéros dans le demi-plan supérieur, et $\Phi^{-ee}(\lambda)$ dans le demi-plan inférieur.

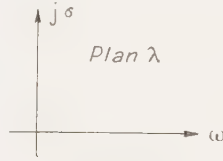


Fig. 14

On écrit ensuite :

$$(1,62) \quad \frac{Q(\lambda)}{\Phi^{-ee}(\lambda)} = H(\lambda) \Phi^{+ee}(\lambda) - \frac{\Phi_{ed}(\lambda)}{\Phi^{-ee}(\lambda)}.$$

On pose :

$$(1,63) \quad \Psi(\lambda) = \frac{\Phi_{ed}(\lambda)}{\Phi^{-ee}(\lambda)}$$

et, toujours d'après le professeur LEE :

$$(1,64) \quad \psi(t) = \int_c \Psi(\lambda) e^{j\lambda t} d\lambda,$$

c étant un contour entourant tous les pôles de $\Psi(\lambda)$. Revenant à $\Psi(\lambda)$ on peut écrire :

$$(1,65) \quad \Psi(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \psi(t) e^{-j\lambda t} dt + \frac{1}{2\pi} \int_\sigma^0 \psi(t) e^{-j\lambda t} dt;$$

la première intégrale ne peut avoir de pôles que dans le demi-plan supérieur, la seconde dans le demi-plan inférieur. Le second membre de l'équation (1,62) s'écrit alors :

$$H(\lambda) \cdot \Phi^{+ee}(\lambda) - \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \psi(t) e^{-j\lambda t} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \psi(t) e^{-j\lambda t} dt;$$

pour satisfaire la condition jointe à cette équation, il faut annuler les deux termes qui sont des pôles dans le demi-plan supérieur :

$$(1,66) \quad H(\lambda) \cdot \Phi_{ee}^+(\lambda) - \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \psi(t) e^{-j\lambda t} dt = 0,$$

d'où la solution :

$$(1,67) \quad H(\lambda) = \frac{1}{2\pi \Phi_{ee}^+(\lambda)} \int_0^\infty \psi(t) e^{-j\lambda t} dt.$$

Nous allons, au chapitre II, adopter cette théorie au cas des systèmes asservis. La solution proposée peut s'obtenir directement sans aucune intégrale à calculer comme nous le justifierons.

DÉTERMINATION DES FONCTIONS DE TRANSFERT DES SYSTÈMES ASSERVIS LINÉAIRES

2,1

PROBLÈME

2,1.1 Remarques préliminaires.

L'amplification d'énergie, à partir de laquelle nous avons défini un système asservi, implique que l'organe commandé soit couplé à un moteur électrique, hydraulique, pneumatique ou, exceptionnellement, mécanique. Il ne peut donc pas y avoir optimisation par rapport à l'organe moteur pour lequel une détermination de fonction de transfert, *a priori*, n'a pas de sens. C'est précisément parce que cette fonction de transfert est déterminée, au moins formellement, pour chacun des différents types de moteurs, que le problème des systèmes asservis existe.

En général, des considérations d'ordre technique, jointes à une estimation des performances requises, permettent de limiter son choix à un ou deux types de moteur, pour chacun desquels il faudra faire un calcul d'adaptation.

Souvent, le ou les derniers étages amplificateurs sont constitués eux-mêmes par des moteurs : le nombre des cas possibles à étudier devient alors important. A titre d'exemple, nous signalerons un asservissement qui a été étudié et réalisé : l'étage amplificateur électronique délivrait une puissance maximum d'environ 5 W, diphasé, 400 Hz. L'étage amplificateur suivant était constitué par un moteur diphasé à faible constante de temps (environ 10 ms), monté en « moteur couple » (induit à très faible débattement angulaire, bridé par ressort linéaire). Ce moteur couple entraînait un distributeur de moteur hydraulique, mais ce distributeur, à deux étages, constituait lui-même un troisième étage préamplificateur du type moteur.

Le moteur hydraulique pouvait délivrer une puissance de 10 kW, alors que la puissance d'entrée était de l'ordre du watt.

Si l'on tient compte que l'on peut raisonnablement escompter une solution en prenant la chaîne suivante : moteur à courant continu, vérin hydraulique à deux étages ou moteur couple (type « haut parleur »), distributeur hydraulique à fuite, distributeur linéaire, vérin, etc., on voit que le nombre de solutions à envisager atteint facilement la

dizaine. Ceci montre l'intérêt de pouvoir déterminer dans chacun des dix cas, directement par synthèse, les réseaux correcteurs optima.

La méthode des coefficients indéterminés de la méthode Hall et Philipps [3], fondée sur le critère de l'erreur quadratique moyenne minimum, et facilement adaptable aux entrées aléatoires, permet de déterminer les coefficients optima de la fonction de transfert du réseau correcteur, une fois la forme de celle-ci choisie. C'est, à notre connaissance, la seule méthode statistique utilisée pour la détermination du réseau correcteur. Elle n'est pas synthétique, puisqu'on part de fonction de transfert déterminées littéralement *a priori*, mais, comme toute méthode fondée sur le critère de l'erreur quadratique, la solution trouvée assure la stabilité.

Considérons un aérodyne muni d'un pilote automatique (*fig. 15*). Nous avons déjà signalé que ce système constituait un système asservi, ses deux fonctions principales (d'ailleurs liées) étant :

a) obéir fidèlement et rapidement aux ordres reçus, problème d'asservissement : maniabilité;

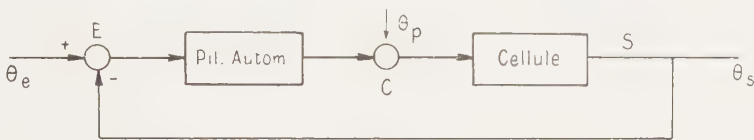


Fig. 15

b) corriger au mieux l'influence des perturbations extérieures, problème de régulation : stabilité.

En général, on peut représenter cet aérodyne par un block-diagram en boucle : les perturbations entrent au point C de la chaîne, différant du point E d'entrée des ordres (la plupart du temps, le signal d'entrée est constant : roulis nul, cap constant; mais le pilotage latéral, évolutions non symétriques, réalisé dans le guidage des fusées ne correspond pas à un signal constant).

Désignant par $A(p)$ et $B(p)$ les fonctions de transfert du pilote automatique et de la cellule, on trouve que l'erreur est :

$$(2,1) \quad \varepsilon(p) = \frac{A \cdot B}{1 + A \cdot B} \theta_e(p) + \frac{B}{1 + A \cdot B} \theta_p(p),$$

où $\theta_e(p)$ est la transformée de Laplace du signal d'entrée, $\theta_p(p)$ est la transformée de Laplace du signal perturbateur.

L'équation (3,1) n'est valable que pour un système linéaire, et en l'absence de couplage entre les ordres et les perturbations. Nous écrivons :

$$(2,2) \quad \varepsilon(p) = H_1 \theta_e(p) + H_2 \theta_p(p).$$

2.1.2 Critère de performance.

L'aérodyné idéal serait celui qui réaliserait la condition :

$$\varepsilon(t) = 0.$$

Le seul critère qui conduise à une analyse mathématique complète et simple est le critère de l'erreur quadratique moyenne :

$$(2,3) \quad \overline{\varepsilon^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \varepsilon^2(t) dt.$$

La différence fondamentale entre l'étude classique, fondée sur l'analyse harmonique, et celle présentée ici, réside dans le fait que cette erreur moyenne résulte à la fois de la dynamique du système en l'absence de bruit (théorie classique) et de l'erreur propre due à la présence inévitable d'un bruit.

La répartition des énergies d'un bruit, en fonction de la fréquence, est étalée sur une très large bande de fréquence. Il y a nécessairement immixtion des spectres des messages et bruits et, de fait, impossibilité de « filtrer » complètement le bruit.

DEUX CONSÉQUENCES :

a) pour un système parfaitement linéaire, il y a une fonction de transfert pour le message (partie utile du signal) et une fonction de transfert pour le bruit superposé au message (*fig. 16*) :

$$(2,4) \quad \varphi_s = A \cdot e;$$

$$(2,5) \quad \varepsilon = \varphi_m - \varphi_s \quad (\text{erreur vraie});$$

$$(2,6) \quad e = \varphi_m + \varphi_e - \varphi_s \quad (\text{signal d'erreur});$$

d'où :

$$(2,7) \quad \varepsilon = -\frac{A}{1+A} \varphi_b + \frac{1}{1+A} \varphi_m.$$

Le bruit et le message donnent donc deux contributions différentes. Le système asservi joue un rôle analogue à un détecteur;

b) tout système réel présente, en général, des phénomènes de saturation. Bien que le système ne soit plus alors linéaire, et, par conséquent, les théories correspondantes plus applicables, on peut admettre, qu'au voisinage de la frontière de ces deux domaines (linéaire ou non linéaire), la remarque suivante est applicable. En général, le rapport signal/bruit (ou message/bruit) est beaucoup plus grand que 1 à l'entrée. S'il advient qu'une saturation apparaisse en un point de la chaîne, le bruit superposé au message pourra être seul détecté; dans ce cas, le rapport signal/bruit à la sortie est plus petit qu'à l'entrée.

Enfin, cet effet est d'autant plus net que la saturation a lieu dans les premiers étages (le bruit propre aux étages suivants est alors normalement amplifié, alors que le message restera saturé).

2.1.3 Différentes configurations possibles.

a) Un ordre de commande (message) est toujours mélangé à un bruit, c'est le cas décrit par les équations (2,4) à (2,7) (fig. 16) :

$$(2,7) \quad \varepsilon = -\frac{1}{1 + \frac{A}{\Lambda}} \varphi_b + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Lambda}} \varphi_m$$

et :

$$(2,8) \quad \varphi_s = \frac{A}{1 + A} (\varphi_m + \varphi_b);$$

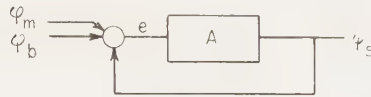


Fig. 16

b) les systèmes asservis « aléatoires » sont soumis à des ordres aléatoires ou à des perturbations aléatoires (ou aux deux simultanément) par perturbations, nous entendons des variations aléatoires des couples (ou forces) résistants. Ce sont donc des perturbations à niveau d'énergie élevé. Par exemple, les variations de charges auxquelles est soumise une turbine entraînant une génératrice, sont dues aux variations de l'état du réseau : ce sont des variations aléatoires dont les lois sont connues *a priori*. Supposons, en effet, que le réseau soit constitué par un grand nombre d'éléments (réseau de distribution d'énergie, par exemple). La probabilité pour que le courant total demandé ait une valeur comprise entre I et $I + dI$ suit une loi de Gauss :

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot I} e^{-\frac{I^2}{2\sigma^2}},$$

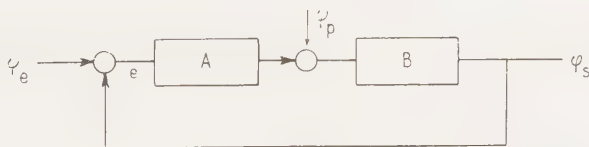


Fig. 17

puisque ce courant est dû à un grand nombre de causes toutes indépendantes les unes des autres. (On rappelle, en effet, que si $x_1, x_2, \dots, x_n$, est une suite de variables aléatoires indépendantes, la somme : $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, a des propriétés statistiques indépendantes des lois de chacune des variables, elle suit nécessairement une loi de Gauss [7].)

Les fréquences des changements d'état du réseau peuvent être représentées par une loi de Poisson, s'il y a une indépendance entre les différents éléments du réseau et si tous ont individuellement une probabilité uniforme de changement d'état :

$$p_2(n, t) = \frac{(kt)^n}{n!} e^{-kt},$$

ou $p_2(n, t)$ est la probabilité d'avoir ce changement dans l'intervalle de temps t ; k est le nombre moyen de changements d'état par unité de temps.

Notons qu'il est rare de pouvoir décrire aussi complètement une fonction aléatoire.

Autres exemples de perturbations : efforts aérodynamiques exercés par le vent sur une antenne radar, effet des rafales sur l'assiette d'un avion.

Dans les systèmes représentés par les exemples ci-dessus, on peut décomposer la fonction de transfert « sortie/entrée » en deux parties séparées par le « point des couples ». Les perturbations φ_p agissent en ce point (fig. 17), ce schéma peut être considéré comme général, l'équation du système est :

$$(2,8) \quad \varphi_s = \frac{A \cdot B}{1 + A \cdot B} \varphi_e + \frac{B}{1 + A \cdot B} \varphi_p;$$

c) considérons φ_e comme constitué par un message φ_m et un bruit φ_b . Les équations du système sont alors :

$$(2,10) \quad \varphi_s = \frac{A \cdot B}{1 + A \cdot B} (\varphi_m + \varphi_b) + \frac{B}{1 + A \cdot B} \varphi_p,$$

ou :

$$\varphi_s = \frac{A \cdot B}{1 + AB} \varphi_m + \frac{B}{1 + A \cdot B} (\varphi_p + A \varphi_b);$$

l'erreur *vraie* est :

$$(2,11) \quad \varepsilon = \frac{1}{1 + A \cdot B} \varphi_m - \frac{A \cdot B}{1 + A \cdot B} \varphi_e + \frac{B}{1 + A \cdot B} \varphi_p;$$

l'effet détecteur signalé en 2.1.2 a) est encore en évidence sur l'équation (2,11). Par exemple, si A est un gain pur k ; $B(p)$ une inertie et un amortissement :

$$(2,12) \quad B(p) = \frac{1}{Ip^2 + fp},$$

l'équation (2,11) devient :

$$(2,13) \quad \varepsilon(p) = \frac{Ip^2 + fp}{Ip^2 + fp + k} \left[\varphi_m - k \varphi_b + \frac{\varphi_p}{Ip^2 + fp} \right];$$

k étant un nombre, on voit que le bruit est affecté du coefficient k dans sa contribution à l'erreur.

2.1.4 Fonction de transfert du réseau correcteur.

Le bruit et le message entrent au même point.

Nous supposons ici, comme dans la suite, que la fonction de transfert de l'organe de puissance (moteur) et de l'organe commandé (charge) est connue, au moins formellement. On peut ajuster certains coefficients, tels que ceux d'amortissement, par la méthode de Hall-Philipps (§ 2.1.1), par exemple.

La solution est identique à celle donnée au paragraphe 1,43 (domaine des télécommunications).

On détermine la fonction de transfert du filtre équivalent (*fig. 18*) :

$$H = \frac{A \cdot B}{1 + A \cdot B}$$

ou B est connu. On en déduit A. Nous ne nous attarderons pas sur ce cas particulier.

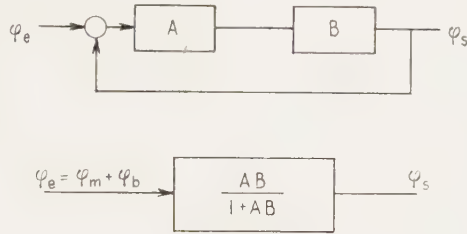


Fig. 18

2,2

CAS GÉNÉRAL ⁽¹⁾

Système asservi dans lequel les perturbations entrent en un point différent de celui des ordres.

2,2.1 Block-diagram et notations (*fig. 19*).

θ_e , θ_p , θ_s étant les transformées de Laplace des fonctions d'entrée (éventuellement considérées comme somme d'un message θ_m et d'un bruit θ_p) perturbatrice et de sortie.

A et B deux fonctions de transfert : B est donné (au moins formellement), A est à optimiser.

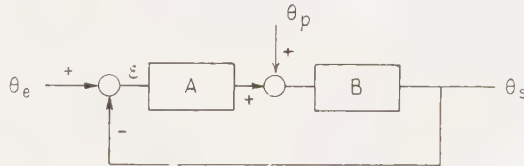


Fig. 19

On rappelle les équations (2,10) et (2,11) régissant le système :

$$(2,10) \quad \theta_s = \frac{A \cdot B}{1 + A \cdot B} \theta_m + \frac{B}{1 + A \cdot B} (\theta_p + A \theta_b);$$

$$(2,11) \quad \varepsilon = \frac{1}{1 + A \cdot B} \theta_m - \frac{A \cdot B}{1 + A \cdot B} \theta_b + \frac{B}{1 + A \cdot B} \theta_p.$$

2,2.2 Principe de la méthode.

La méthode d'optimisation n'est pas applicable directement au cas représenté par la *figure 19*.

(1) M. PELEGRIN, comptes rendus, 232 (1951), p. 473.

Partant de l'équation (2,10), on peut effectuer les transformations suivantes :

$$(2,14) \quad \begin{cases} \theta_s = H(p) \theta_m + G(p) [\theta(p) + A(p) \theta_b], \\ H(p) = \frac{A \cdot B}{1 + A \cdot B} \quad G(p) = \frac{B}{1 + A \cdot B}; \end{cases}$$

$G(p)$ peut s'écrire linéairement, par rapport à H :

$$(2,15) \quad G(p) = B(1 - H),$$

ce qui conduit à une relation linéaire en H pour θ_s :

$$\theta_s = H \theta_m + B(1 - H) [\theta_p - A \theta_b];$$

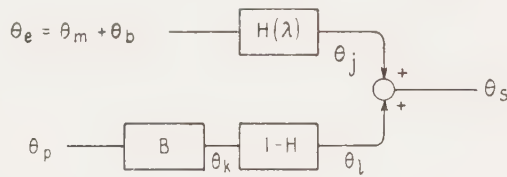


Fig. 20

en exprimant également A , qui est à optimiser en fonction de H et de B , qui est connu, on obtient :

$$(2,16) \quad \theta_s = H(\theta_m + \theta_b) + B(1 - H)\theta_p$$

(équation qu'on peut écrire directement).

La relation (2,16) est *linéaire en H* : elle correspond au block-diagram représenté figure 20.

2,2,3 Mise en équation.

Soient $h(t)$ et $b(t)$ les réponses impulsionnelles des fonctions de transfert $H(p)$ et $B(p)$, c'est-à-dire les transformées de Laplace inverses des fonctions de transfert :

$$(2,17) \quad h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} H(p) e^{tp} dp;$$

le chemin d'intégration est une parallèle à l'axe imaginaire qui laisse tous les pôles de $H(p)$ à sa gauche, lorsqu'on la parcourt de $-\infty$ à $+\infty$. En général, $H(p)$ n'a pas de pôles dans le demi-plan de droite $p = \sigma + j\omega$; on peut donc prendre l'axe imaginaire lui-même comme ligne d'intégration (module de convergence $C_0 = 0$).

A droite de cet axe, $|H(p)|$ doit tendre vers 0 lorsque $p \rightarrow \infty$ dans toutes les directions d'une façon au moins aussi rapide que $\frac{1}{r^{1+\varepsilon}}$ où $r = |p|$ et ε est un nombre positif arbitrairement petit.

$h(t)$ est une fonction nécessairement bornée. Enfin, on notera que l'on peut déplacer l'axe séparant les deux régions vers la gauche jusqu'à la rencontre avec la première singularité de $H(p)$ (singularité à partie réelle la plus grande).

Notons enfin que $b(t)$ est une fonction connue puisque $B(p)$ l'est; $h(t)$, au même titre que $H(p)$, est à optimiser.

De proche en proche, on peut écrire :

$$\theta_d(t) = \int_0^{\infty} h(\sigma) \theta_e(t - \sigma) d\sigma,$$

ou, puisque $h(\sigma) \equiv 0$ pour $\sigma < 0$:

$$(2,18) \quad \theta_j(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\sigma) \theta_e(t - \sigma) d\sigma;$$

$$(2,19) \quad \theta_k(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} b(\mu) \theta_p(t - \mu) d\mu.$$

Le passage de θ_k à θ_e est plus délicat à justifier, bien que les résultats soient aussi simples.

Cherchons d'abord la transformée de Laplace inverse de $1 - H(p) = L(p)$, soit $l(t)$ cette transformée :

$$l(t) = \mathcal{L}^{-1}[L(p)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} (1 - H) e^{pt} dp,$$

$$l(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{pt} dp - h(t).$$

La première intégrale représente une fonction de Dirac à l'origine $t = 0$, soit $\delta_0(t)$ cette fonction :

$$(2,20) \quad l(t) = \delta_0(t) - h(t).$$

Le calcul de la réponse d'un filtre qui aurait $l(t)$ pour réponse impulsionnelle s'effectue alors comme suit :

$$(2,21) \quad \theta_e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} l(\sigma) \theta_k(t - \sigma) d\sigma,$$

soit :

$$\theta_e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(\sigma) \theta_k(t - \sigma) d\sigma - \int_{-\infty}^{+\infty} h(\sigma) \theta_k(t - \sigma) d\sigma;$$

la première intégrale du second membre est $\theta_k(t)$.

Finalement :

$$(2,22) \quad \theta_e(t) = \theta_k(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} h(\sigma) \theta_k(t - \sigma) d\sigma,$$

ou :

$$(2,23) \quad \theta_e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} b(\mu) \theta_p(t - \mu) d\mu - \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} b(\mu) \theta_p(t - \tau - \mu) d\mu.$$

La fonction de sortie est la somme de :

$$(2,24) \quad \theta_s(t) = \theta_e(t) + \theta_d(t).$$

EXPRESSION DE L'ERREUR.

Désignons par $\theta_d(t)$ la fonction réponse *désirée*. En général $\theta_d(t)$ est lié fonctionnellement à la fonction aléatoire d'entrée, plus précisément, au *message* contenu dans la fonction d'entrée. $\theta_d(t)$ est donc, soit une fonction bien déterminée de la fonction aléatoire représentant le message, soit une fonctionnelle de celui-ci. Cette fonction ou fonctionnelle peut inclure l'opérateur p de Laplace afin de faire correspondre à chaque *épreuve* du message une fonction (dérivée, intégrale, etc.) de cette épreuve. Exemples :

- entrée = message $\theta_m(t)$ + bruit $\theta_b(t)$;
- sortie *désirée* = $\theta_d(t)$ = message seul $\theta_m(t)$ (filtre),

ou :

- sortie *désirée* = message retardé ou avancé de α s :

$$\theta_d(t) = \theta_m(t \pm \alpha),$$

ou :

- sortie *désirée* = dérivée du message :

$$\theta_d(t) = p \theta_m(t \pm \alpha),$$

l'erreur quadratique moyenne est donc :

$$(2,25) \quad \varepsilon = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} dt \left[\theta_d - \int h(\sigma) \theta_e(t - \sigma) d\sigma - \int b(\mu) \theta_p(t - \mu) d\mu \right. \\ \left. + \int h(\tau) d\tau \int b(\mu) \theta_p(t - \tau - \mu) d\mu \right]$$

(on n'indique pas les limites d'intégration lorsque celles-ci sont $-\infty, +\infty$).

En développant le carré, en échangeant les ordres d'intégration et en utilisant les définitions des fonctions d'autocorrélation et de corrélation mutuelle qui apparaissent d'elles-mêmes, nous obtenons :

$$(2,26) \quad \begin{aligned} \varepsilon = & \varphi_{dd}(0) \\ & + \int h(\sigma) d\sigma \int h(\tau) d\tau \varphi_{ee}(\tau - \sigma) \\ & + \int b(\mu) d\mu \int b(\tau) d\tau \varphi_{pp}(\tau - \mu) \\ & + \int h(\tau) d\tau \int h(\sigma) d\sigma \int b(\mu) d\mu \int b(\nu) d\nu \varphi_{pp}(\tau + \mu - \sigma - \nu) \\ & - 2 \int h(\sigma) d\sigma \varphi_{ed}(\sigma) - 2 \int b(\mu) d\mu \varphi_{pd}(\sigma) \\ & - 2 \int h(\sigma) d\sigma \int b(\mu) d\mu \varphi_{ep}(\sigma - \mu) \\ & + 2 \int h(\tau) d\tau \int b(\mu) d\mu \varphi_{ed}(\tau + \mu) \\ & - 2 \int h(\sigma) d\sigma \int h(\tau) d\tau \int b(\mu) d\mu \varphi_{ep}(\sigma - \tau - \mu) \\ & - 2 \int b(\mu) d\mu \int h(\tau) d\tau \int b(\sigma) d\sigma \varphi_{pp}(\mu - \tau - \sigma); \end{aligned}$$

le calcul formel conduit à des intégrales convergentes, puisque l'on admet :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \theta_e^2(t) dt \text{ finie;}$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \theta_p^2(t) dt \text{ finie.}$$

Le premier terme du développement (2,26) $\varphi_{dd}(0)$ est écrit sous cette forme par commodité, c'est :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \theta_d^2(t) dt.$$

2.2.4 Minimisation de cette erreur.

Il s'agit de déterminer une fonction $h(t)$ telle que ε , donné par (2,26), soit minimum, compte tenu de la condition *nécessaire* suivante :

$$h(t) \equiv 0 \quad \text{pour} \quad t < 0.$$

Toutes les autres quantités figurant dans ε sont connues.

Pour exprimer que ε est minimum, on applique le calcul des variations fonctionnel [5]; soit α un paramètre indépendant de h et $\eta(\xi)$ la variation de $h(\xi)$ avec la restriction fondamentale suivante :

$$(2,27) \quad \eta(\xi) \equiv 0 \quad \text{pour} \quad \xi < 0.$$

Remplaçant $h(t)$ par $h(t) + \alpha \eta(t)$, on obtient :

$$(2,28) \quad \begin{aligned} \varepsilon + \delta \varepsilon = & \varepsilon + 2 \alpha \int \eta(\sigma) d\sigma \int h(\tau) d\tau \varphi_{ee}(\tau - \sigma) \\ & + \alpha \int \eta(\tau) d\tau \int h(\sigma) d\sigma \int b(\mu) d\mu \int b(\nu) d\nu \varphi_{bb}(\tau + \mu - \sigma - \nu) \\ & + \alpha \int \eta(\sigma) d\sigma \int h(\tau) d\tau \int b(\mu) d\mu \int b(\nu) d\nu \varphi_{bb}(\tau + \mu - \sigma - \nu) \\ & - 2 \alpha \int \eta(\sigma) d\sigma \varphi_{ed}(\sigma) \\ & + 2 \alpha \int \eta(\tau) d\tau \int b(\mu) d\mu \varphi_{pd}(\tau + \mu) \\ & + 2 \alpha \int \eta(\sigma) d\sigma \int b(\mu) d\mu \varphi_{ep}(\sigma - \mu) \\ & - 2 \alpha \int \eta(\sigma) d\sigma \int h(\tau) d\tau \int b(\mu) d\mu \varphi_{ep}(\sigma - \tau - \mu) \\ & - 2 \alpha \int \eta(\tau) d\tau \int h(\sigma) d\sigma \int b(\mu) d\mu \varphi_{ep}(\sigma - \tau - \mu) \\ & - 2 \alpha \int \eta(\tau) d\tau \int b(\mu) d\mu \int b(\sigma) d\sigma \varphi_{pp}(\mu - \tau - \sigma). \end{aligned}$$

Une condition nécessaire, on vérifie qu'elle est suffisante, pour obtenir un minimum, est :

$$(2,29) \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} (\varepsilon + \delta \varepsilon) \Big|_{\alpha=0} = 0,$$

pour toute variation $\eta(t)$ possible.

L'équation (2,29) se traduit immédiatement par :

$$(2,30) \quad \begin{aligned} & 2 \int \eta(\sigma) d\sigma \int h(\tau) d\tau \varphi_{ee}(\tau - \sigma) \\ & + \int \eta(\sigma) d\sigma \int h(\tau) d\tau \int b(\mu) d\mu \int b(\nu) d\nu \varphi_{pp}(\sigma + \mu - \tau - \nu) \\ & + 2 \int \eta(\sigma) d\sigma \int h(\tau) d\tau \int b(\mu) d\mu \int b(\nu) d\nu \varphi_{pp}(\tau + \mu - \sigma - \nu) \\ & + 2 \int \eta(\sigma) d\sigma \int b(\mu) d\mu \varphi_{ep}(\sigma - \mu) \\ & - 2 \int \eta(\sigma) d\sigma \int h(\tau) d\tau \int b(\mu) d\mu \varphi_{ep}(\sigma - \tau - \mu) \\ & - 2 \int \eta(\sigma) d\sigma \varphi_{ed}(\sigma) + 2 \int \eta(\sigma) d\sigma \int b(\mu) d\mu \varphi_{pd}(\sigma + \mu) \\ & - 2 \int \eta(\sigma) d\sigma \int h(\tau) d\tau \int b(\mu) d\mu \varphi_{ep}(\tau - \sigma - \mu) \\ & - 2 \int \eta(\sigma) d\sigma \int b(\mu) d\mu \int b(\tau) d\tau \varphi_{pp}(\mu - \sigma - \tau) = 0. \end{aligned}$$

Dans cette équation, on peut sortir $\eta(\sigma)$ et l'intégration par rapport à σ : ceci revient à mettre $\int \eta(\sigma) d\sigma$ en facteur (2,30) devient de la forme :

$$(2,31) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(\sigma) d\sigma [F(\sigma)] = 0.$$

Cette équation est l'expression directe de la condition (2,29); elle doit donc avoir lieu pour toute fonction $\eta(\sigma)$ satisfaisant à l'unique condition :

$$\eta(\sigma) \equiv 0 \quad \text{pour} \quad \sigma < 0.$$

L'équation (2,30) peut donc s'écrire :

$$(2,32) \quad \begin{aligned} & \int h(\tau) d\tau \left[\varphi_{ee}(\tau - \sigma) - \int b(\mu) d\mu \int b(\nu) d\nu \{ \varphi_{pp}(\sigma - \tau + \mu - \nu) \right. \\ & \quad \left. + \varphi_{pp}(\sigma - \tau - \mu - \nu) \} \right. \\ & \quad \left. - 2 \int b(\mu) d\mu \{ \varphi_{ep}(\sigma - \tau - \mu) + \varphi_{pe}(\sigma - \tau + \mu) \} \right] \\ & - 2 \varphi_{ed}(\sigma) + 2 \int b(\mu) d\mu [\varphi_{pd}(\sigma + \mu) - \varphi_{ep}(\sigma - \mu)] \\ & - 2 \int b(\mu) d\mu \int b(\tau) d\tau \varphi(\mu - \sigma - \tau) = 0, \end{aligned}$$

avec la condition fondamentale suivante :

$$(2,33) \quad \text{« l'égalité à zéro n'est vraie que pour } \sigma \geq 0 \text{ »,}$$

soit $q(\sigma)$ le premier membre de (2,32), il est de la forme :

$$(2,34) \quad q(\sigma) = \int h(\tau) A_1(\tau - \sigma) d\tau + B_1(\sigma),$$

où $A_1(\tau - \sigma)$ et $B_1(\sigma)$ sont en évidence sur l'équation (2,32).

La condition exprimant le minimum est :

$$(2,35) \quad q(\sigma) = 0 \quad \text{pour} \quad \sigma \geq 0.$$

L'équation (2,34) est analogue, quant à sa forme, à l'équation de Wiener Hopf rappelée précédemment.

SOLUTION DE L'ÉQUATION (2,35), PREMIÈRE PHASE.

Nous employons une méthode parallèle à celle du professeur Y. W. LEE en en précisant toutefois un certain nombre de points.

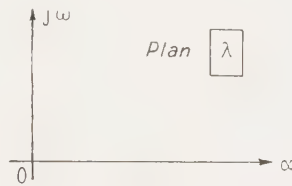


Fig. 21

Cette solution est fondée sur le fait qu'une fonction qui a une valeur constamment nulle, sur un demi-axe du plan des temps (abscisses : temps; ordonnées : valeurs de la fonction), ne peut avoir de pôles dans un demi-plan du domaine fréquences.

Si la fonction est nulle sur le demi-axe $t > 0$, elle ne peut avoir de pôles dans le demi-plan de droite (fig. 21) :

$$\lambda = \alpha + j\omega \quad (1).$$

En effet, considérons la transformée d'une fonction $q(\sigma)$ telle que celle définie par (2,32) ou (2,35). Montrons que $Q(\lambda)$ ne peut avoir de pôles que dans le demi-plan de droite.

Nous prenons les transformées de *Fourier généralisées* de $q(\sigma)$:

$$(2,36) \quad \begin{aligned} Q(\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} q(t) e^{-\lambda t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} q(t) e^{-(\alpha + j\omega)t} dt; \\ Q(\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} q(t) e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt; \end{aligned}$$

(1) Notations différentes de celles du professeur Y. W. LEE qui prend comme plan $\lambda = \omega + j\alpha$. Tous les calculs qui suivent sont faits dans le plan $\lambda = \alpha + j\omega$, familiers aux mécaniciens.

l'intégrale est convergente si $\alpha t > 0$; or $q(t)$ n'est non nulle que pour $t < 0$; donc, si $\alpha < 0$ (demi-plan de gauche), l'intégrale converge et par conséquent $Q(\lambda)$ ne peut avoir de pôles dans cette région.

La transformée de Fourier généralisée du second membre de (2,34) :

$$Q(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda t} dt \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(\tau) A_1(\tau - t) d\tau - B_1(t) \right],$$

qu'on trouve égale à :

$$(2,37) \quad Q(\lambda) = H(\lambda) \cdot A_1(\lambda) - B_1(\lambda);$$

avec la condition « transformée » de la condition (2,35) :

$$(2,38) \quad \text{« pôles de } Q(\lambda) \text{ dans le demi-plan de droite ».}$$

Tenant compte des expressions de $A_1(\tau - t)$ et $B_1(t)$, qu'on déduit de l'équation (2,32), on obtient, après quelques calculs ne présentant aucune difficulté :

$$(2,39) \quad Q(\lambda) = H(\lambda) [\Phi_{ee}(\lambda) - B(\lambda) \Phi_{ep}(\lambda) - B^*(\lambda) \Phi_{pe}(\lambda) + B(\lambda) \cdot B^*(\lambda) \varphi_{pp}(\lambda)] \\ - [\Phi_{ed}(\lambda) - B(\lambda) \Phi_e(\lambda) - B^*(\lambda) \Phi_{bd}(\lambda) + B(\lambda) B^*(\lambda) \Phi_{pp}(\lambda)],$$

où $B^*(\lambda)$ est le conjugué de $B(\lambda)$.

CONDITIONS SUR $q(\sigma)$ ET $Q(\lambda)$.

$q(\sigma)$ est bornée :

$$q(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) A_1(\tau - \sigma) d\tau + B_1(\sigma);$$

revenons à l'équation (2,32). Le crochet de l'intégrande de la première intégrale peut être considéré comme la fonction d'autocorrélation de :

$$\theta_e - B \theta_p.$$

En effet, la fonction d'autocorrélation de $\theta_e - B \theta_p$ est :

$$[\overline{\theta_e(t) - B(t) \theta_p(t)}] [\overline{\theta(t + \tau) - B(t + \tau) \theta_p(t + \tau)}] \\ = \overline{\theta_e(t) \theta_e(t + \tau) + B(t) B(t + \tau) \theta_p(t) \theta_p(t + \tau)} \\ - \overline{\theta_e(t) B(t + \tau) \theta_p(t + \tau) + \theta_e(t + \tau) B(t) \theta_p(t)}.$$

Si l'on prend les transformées de Fourier de l'expression précédente, on obtient (cf § 1,1) :

$$\Phi_{ee}(\lambda) + B(\lambda) B(-\lambda) \Phi_{pp}(\lambda) - B(\lambda) \Phi_p(\lambda) - B(-\lambda) \Phi_{pe}(\lambda).$$

Or, la transformée de Fourier du premier membre est le spectre énergétique de $\theta_e - B \theta_p$; réciproquement, la transformée de Fourier, inverse de l'expression ci-dessus,

est l'expression (2,32) : le premier crochet $A_1(\tau - \sigma)$ peut donc bien être considéré comme la fonction d'autocorrélation de :

$$\theta_e - B \theta_p.$$

On démontrerait de même que B_1 peut être considéré comme la fonction de corrélation mutuelle de $(\theta_e - B \theta_p)$ et $(\theta_d - B \theta_p)$.

Dans ces conditions, l'équation (2,34) conduit à une fonction nécessairement *bornée*. $h(\tau)$ est en effet nul pour $\tau < 0$ et pour $\tau > 0$, $h(\tau)$ tend vers 0 de même $A_1(\tau - \sigma)$ tend vers 0. De plus, $A_1(x)$, pouvant être considéré comme fonction d'autocorrélation, est une fonction paire; elle tend donc vers 0 soit exponentiellement, soit comme $\frac{1}{x^2}$ dans les deux cas l'intégrale converge.

Quant à $B(\lambda)$ c'est une fonction nécessairement bornée, puisqu'on peut la considérer comme une fonction de corrélation mutuelle.

$q(\sigma)$ étant bornée, $Q(\lambda)$ a un module de convergence nul.

Supposons, pour simplifier l'écriture, qu'il n'y ait aucune corrélation entre la fonction d'entrée $\theta_e(t)$ et les perturbations $\theta_p(t)$. Cette hypothèse est généralement satisfaite; cependant, si la fonction d'entrée est elle-même constituée d'un message et d'un bruit, il peut y avoir corrélation entre le bruit et la perturbation. D'autre part, il existe bien des cas où les perturbations sont en dépendance stochastique : par exemple, supposons que l'on étudie, par enregistrement mécanique ou photographique, une grandeur liée à un moteur d'un avion en vol. L'enregistreur, fixé dans la cabine, est soumis à des perturbations dues aux vibrations. Il est certain que la source principale de vibrations est constituée elle-même par le moteur (équilibre dynamique non parfait) et que, par conséquent, il existe une corrélation entre le bruit et la grandeur mesurée sur le moteur.

Nous faisons donc l'hypothèse d'indépendance uniquement dans un but de simplification d'écriture :

$$\Phi_{ep} \equiv 0, \quad \Phi_{pd} \equiv 0;$$

alors :

$$(2,40) \quad A_1(\lambda) = \Phi_{ee}(\lambda) + B^*(\lambda) B(\lambda) \Phi_{pp}(\lambda);$$

$$(2,41) \quad B_1(\lambda) = \Phi_{ed}(\lambda) + B^*(\lambda) B(\lambda) \Phi_{pp}(\lambda).$$

Les équations (2,32) et (2,34) montrent que $A_1(\lambda)$ résulte de transformations portant sur des fonctions d'autocorrélation ou de corrélation mutuelle. Ces fonctions sont, en général, obtenues expérimentalement. La recherche de fonctions représentatives de ces « courbes » peut et doit se faire par des développements limités de fonctions orthogonales et normales, en effet :

a) l'égalité de Parseval permet de calculer le nombre n de termes du développement de fonctions ortho-normales, qui conduit à une erreur moyenne quadratique inférieure à ε , nombre arbitraire aussi petit que l'on veut, positif.

En effet, soit $\varphi_e(t)$ un système de fonctions orthogonales normé, soit $S_n(t)$ la somme des n premiers termes du développement limité :

$$S_n(t) = \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(t),$$

où :

$$C_i = \int_a^b f(t) \varphi_i(t) dt;$$

on démontre ⁽¹⁾ que l'on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [f(t) - S_n(t)]^2 dt = 0,$$

ce qui veut dire qu'à tout nombre ε on peut faire correspondre un nombre n tel que :

$$\int_a^b [f(t) - S_n(t)]^2 dt < \varepsilon;$$

(a, b) intervalle d'ortho-normalité;

b) le passage du domaine temps au domaine fréquences conserve l'orthogonalité et l'erreur. Si le développement est effectué en fonctions de Legendre, Laguerre ou Hermite ⁽²⁾, les transformées de Fourier de chacun des termes sont rationnelles.

Nous faisons donc l'hypothèse, nécessaire pour la solution présentée ici, que les spectres $\Phi_{ee}(\lambda)$ et $\Phi_{pp}(\lambda)$ sont exprimés rationnellement en fonction de λ s'ils sont fournis par l'expérience ou s'ils ne se trouvent pas directement écrits sous cette forme. D'autre part, le système asservi étant supposé linéaire, la fonction $B(\lambda)$ est également rationnelle en λ . Nous maintiendrons ces deux hypothèses dans la suite de ce travail.

Il n'en est pas ainsi pour $B_1(\lambda)$. En effet, $\Phi_{ed}(\lambda)$ résulte d'une transformation de Fourier portant sur $\varphi_{ed}(\tau)$, fonction de corrélation mutuelle entre $\theta_e(t)$ et $\theta_d(t)$ liée fonctionnellement à $\theta_e(t)$ ou même pouvant être arbitraire. En particulier si la fonction de sortie *désirée* correspond au message décalé dans le temps, en avance ou en retard, on fait appel à une relation fonctionnelle non rationnelle :

$$(2,42) \quad \theta_d(t) \equiv \theta_m(t \pm \beta),$$

qui se traduit sur les spectres par :

$$(2,43) \quad \Phi_{ed}(\lambda) = \Phi_{em}(\lambda) e^{\pm j\beta\lambda}.$$

Cette notion de retard ou d'avance est suffisamment importante à elle seule pour chercher une solution de l'équation de (2,35) qui ne nécessite pas l'hypothèse : $B_1(\lambda)$ rationnelle.

La solution sera indiquée au paragraphe 2,2.6.

2,2.5 Unicité de la solution de l'équation (2,35) dans le cas général.

Partant de l'équation :

$$Q(\lambda) = H(\lambda) A_1(\lambda) + B_1(\lambda),$$

avec la condition : pôles de $Q(\lambda)$ dans le demi-plan de droite, le plan λ étant défini par $\lambda = \alpha + j\omega$ (fig. 21).

(1) Voir par exemple : CHAPELON, Cours de l'École Polytechnique (octobre 1943).

(2) Il existe des tables donnant les expressions de ces fonctions, certains centres de calcul, à cartes perforées, possèdent également ces fonctions en « fichiers ».

Décomposons $A_1(\lambda)$ en $A_d(\lambda) \cdot A_g(\lambda)$ où $A_d(\lambda)$ est une fonction rationnelle dont les pôles et les zéros sont situés dans le demi-plan de droite ($\alpha > 0$), et $A_g(\lambda)$ une fonction rationnelle dont les pôles et les zéros sont situés dans le demi-plan de gauche. On peut supposer que la solution est unique; supposons qu'on puisse trouver deux solutions H_1 et H_2

$$\begin{aligned} Q_1 &= A_1 H_1 + B_1, \\ Q_2 &= A_1 H_2 + B_1, \\ (2,44) \quad Q_1 - Q_2 &= A_1 (H_1 - H_2); \end{aligned}$$

on doit montrer que cette égalité ne peut avoir lieu que si :

$$H_1 = H_2 \quad \text{donc} \quad Q_1 = Q_2;$$

considérons alors l'équation : $Q = AH$.

D'après ce qui a été dit, A est, ou peut être considéré comme une fonction rationnelle.

Écrivons :

$$(2,45) \quad Q = \frac{A_d \cdot A_g}{B_d \cdot B_g} H,$$

où A_d, B_d sont des polynômes ayant leurs zéros dans le demi-plan de droite; où A_g, B_d sont des polynômes ayant leurs zéros dans le demi-plan de gauche.

Les pôles de H ne peuvent être pris que parmi tout ou partie des termes A_g .

Écrivons :

$$(2,46) \quad H = \frac{H_1}{A'_g};$$

avec :

$$(2,47) \quad (d^0 A'_g) < (d^0 A);$$

mais, par suite de la condition de nullité H à l'infini, on doit aussi avoir :

$$(2,48) \quad (d^0 A'_g) > (d^0 H_1),$$

d'où, *a fortiori* :

$$(2,49) \quad (d^0 H_1) < (d^0 A_g).$$

D'autre part, tous les zéros de A'_g situés à droite (racine de $A'_g = 0$) sont nécessairement des zéros de H_1 : donc :

$$(2,50) \quad (d^0 H_1) \geq (d^0 B_g),$$

or A , considéré comme transformée de Fourier d'une fonction d'autocorrélation tend vers 0 à l'infini, donc :

$$(2,51) \quad (d^0 A_d) + (d^0 A_g) < (d^0 B_d) + (d^0 B_g);$$

c'est aussi, pour la même raison une fonction paire, donc :

$$(2,52) \quad (d^0 A_g) < (d^0 B_g);$$

les inégalités (2,49), (2,50), (2,52), sont incompatibles, donc la solution est unique ⁽¹⁾.

2.2.6 Solution générale.

Considérons l'équation :

$$(2,53) \quad \underbrace{Q(\lambda)}_{\substack{\text{Pôles} \\ \text{dans } 1/2 \\ \text{plan de} \\ \text{droite}}} \underbrace{A_d(\lambda)}_{\substack{\text{Pôles} \\ \text{dans} \\ 1/2 \text{ plan} \\ \text{de} \\ \text{gauche}}} \underbrace{A_g(\lambda)}_{\substack{\text{Pôles et} \\ \text{zéros} \\ 1/2 \\ \text{plan de} \\ \text{gauche}}} + \underbrace{B_1(\lambda)}_{\substack{\text{Pôles} \\ \text{partout}}} = \underbrace{B_d(\lambda)}_{\substack{\text{Pôles} \\ \text{partout}}},$$

soit :

$$(2,54) \quad \Psi(\lambda) = \frac{B_1(\lambda)}{A_g(\lambda)};$$

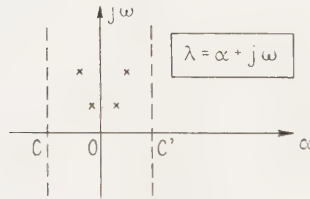


Fig. 22

sa transformée de Fourier généralisée, s'écrit :

$$(2,55) \quad \psi(t) = \int_{C-j\infty}^{C+j\infty} \Psi(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda,$$

avec les conditions (éq. 1,9) :

$$(2,56) \quad \Re(\lambda) > C, \\ t \geq 0,$$

où $C = |OC|$ (fig. 22) est l'abscisse de convergence, mais ici nous ne pouvons pas nous limiter à l'hypothèse $t \geq 0$ pour $\psi(t)$. Nous devons donc adjoindre à l'équation (2,55) l'équation (2,57) et les conditions (2,49) :

$$(2,57) \quad \psi(t) = \int_{C-j\infty}^{C'+j\infty} \Psi(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda;$$

$$(2,58) \quad \Re(\lambda) < C', \\ t \leq 0, \\ C' < OC'.$$

(1) Suite à discussion avec M. KUNTZMAN (Faculté des Sciences, Grenoble).

Les équations (2,55) et (2,57) peuvent être fondue en une seule et même équation :

$$(2,59) \quad \psi(t) = \int_C \Psi(\lambda) e^{\lambda t} d\lambda,$$

où C désigne un contour entourant tous les pôles de $\Psi(\lambda)$.

Il ne s'agit cependant que d'une expression formelle, les conditions (2,56) et (2,58) subsistent toujours.

Prenant à nouveau la transformée de Fourier inverse de (2,50), on peut écrire :

$$(2,60) \quad \Psi(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) e^{-\lambda t} dt$$

qu'on scinde en deux intégrales :

$$(2,61) \quad \Psi(\lambda) = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \psi(t) e^{-\lambda t} dt}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \psi(t) e^{-\lambda t} dt}_{I_2};$$

l'expression I_1 ne peut avoir de pôles que dans le demi-plan de gauche; l'expression I_2 ne peut en avoir qu'à droite.

Cette décomposition n'est valable seulement pour des fonctions qui ont un comportement à l'infini qui conduit à des intégrales convergentes.

Si $\psi(t)$ a un original, la transformée de Fourier donne deux transformées de Laplace, donc :

$$I_1 \rightarrow 0 \quad \text{plus rapidement que } \frac{1}{r^{1+\varepsilon}}$$

ou :

$$r = |\lambda| \quad \text{et} \quad \varepsilon > 0.$$

Revenant à l'équation (2,53), elle s'écrit maintenant :

$$(2,62) \quad \frac{Q(\lambda)}{A_d(\lambda)} = H(\lambda) A_g(\lambda) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \psi(t) e^{-\lambda t} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \psi(t) e^{-\lambda t} dt.$$

Deux des termes du second membre ont leurs pôles dans le demi-plan de gauche : ce membre étant la *somme* des trois termes, il faut et il suffit d'écrire que la somme des deux termes, dont les pôles sont dans le demi-plan de gauche, est nulle :

$$(2,63) \quad H(\lambda) A_g(\lambda) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \psi(t) e^{-\lambda t} dt = 0,$$

d'où :

$$(2,64) \quad H(\lambda) = \frac{1}{2\pi A_g(\lambda)} \int_0^{\infty} \psi(t) e^{-\lambda t} dt,$$

où :

$$(2,65) \quad \psi(t) = \int_c \frac{B_1(\lambda)}{A_g(\lambda)} d\lambda.$$

REMARQUE. — Cas où l'expression $B_1(\lambda)$ de l'équation (2,41) rationnelle, ou peut être mise sous forme rationnelle.

L'expression :

$$H(\lambda) \cdot A_1(\lambda) + B_1(\lambda)$$

ne doit avoir aucun pôle dans le demi-plan de gauche.

On décompose $A_1(\lambda)$ en $A_g(\lambda), A_d(\lambda)$.

L'équation (2,37) peut s'écrire :

$$(2,66) \quad \frac{Q(\lambda)}{A_d(\lambda)} = H(\lambda) A_g(\lambda) + \frac{B_1(\lambda)}{A_d(\lambda)}.$$

$\frac{B_1(\lambda)}{A_d(\lambda)}$ est une fraction rationnelle qui a des pôles dans tout le plan : il est possible de décomposer cette fonction en une *somme* de deux fonctions qui ont leurs pôles, soit dans le plan de gauche $\mathcal{B}_g(\lambda)$, soit dans le plan de droite $\mathcal{B}_d(\lambda)$:

$$(2,67) \quad \frac{B_1(\lambda)}{A_d(\lambda)} = \mathcal{B}_g(\lambda) + \mathcal{B}_d(\lambda).$$

D'après le théorème de Liouville, on obtiendra la solution, comme précédemment, en l'écrivant :

$$(2,68) \quad H(\lambda) A_g(\lambda) + \mathcal{B}_g(\lambda) = 0,$$

d'où :

$$(2,69) \quad H(\lambda) = -\frac{\mathcal{B}_g(\lambda)}{A_g(\lambda)}.$$

La solution (2,64) ou (2,69) donnée ci-dessus est *unique* et correspond nécessairement à un minimum pour l'ensemble des fonctions $H(\lambda)$ résultant de l'hypothèse : $A(\lambda)$ fraction *rationnelle*. Cette solution nécessite également pour $B(\lambda)$ d'un nombre *fini* de pôles et des conditions restrictives (assez peu il est vrai) sur le comportement à l'infini de $\Psi(\lambda)$. En particulier, tout comportement à l'infini de $\Psi(\lambda)$ en $e^{-\lambda\alpha}$ où α est une constante est satisfaisant.

2,3

CAS DES SYSTÈMES ASSERVIS

2,3.1 Particularités par rapport au cas général.

Comme nous l'avons signalé, un système asservi comporte nécessairement une inertie dans les derniers étages de la chaîne : nous rappelons que bien souvent l'inertie de l'organe moteur est considérablement plus importante que celle de l'organe commandé. C'est pratiquement toujours le cas lorsqu'il s'agit d'un moteur électrique attaquant, par un train d'engrenages démultiplicateur, un organe tel que gouverne d'avion,

vanne d'une conduite, etc. (On rappelle que le rapport à considérer est celui des inerties multiplié par le *carré* du rapport de réduction.)

L'organe B du schéma, du paragraphe 2,2.1, comporte donc nécessairement un pôle, s'il n'y a pas de couple de rappel. Ce pôle sera simple, s'il y a un terme de frottement visqueux non négligeable :

$$(2,70) \quad B(\lambda) = \frac{1}{J\lambda^2 + f\lambda},$$

il sera double, si ce dernier terme n'existe pas :

$$(2,71) \quad B(\lambda) = \frac{1}{J\lambda^2},$$

J étant l'inertie du système commandé et du moteur d'entraînement.

La solution donnée au paragraphe 2,2.6, nécessite la décomposition de fonction A_1 , supposée rationnelle, en un produit de deux fonctions, chacune ayant des pôles, soit dans le demi-plan de droite, soit dans le demi-plan de gauche, l'axe imaginaire étant exclu.

Ici, au contraire, nous pouvons avoir des pôles sur l'axe, c'est une première difficulté à lever.

D'autre part, le but recherché dans un système asservi est, en général, d'obtenir une « sortie » identique à « l'entrée ». La « fonction de sortie » désirée, définie au paragraphe 2,2.3, est alors :

$$(2,72) \quad \theta_d(t) = \theta_m(t);$$

d'ailleurs égal à $\theta_e(t)$ puisqu'on suppose, pour simplifier les écritures, qu'aucun bruit n'est superposé au « message » à l'entrée du système asservi.

Cette particularité modifie la forme de l'équation de Wiener Hopf.

Occupons-nous d'abord de l'influence des pôles qui peuvent se trouver sur l'axe imaginaire (en fait, à l'origine).

2,3.2 Cas des pôles à l'origine.

Nous revenons donc au cas général : équation (2,37) dans laquelle $B_1(\lambda)$ n'est pas nécessairement rationnelle. Nous supposons que $A_1(\lambda)$ et $B_1(\lambda)$ ont un pôle d'ordre $2n$ à l'origine. Ce pôle ne peut, de toute façon, pas être supérieur à l'ordre 4 comme on peut le voir sur les expressions (2,40) et (2,41) et il est nécessairement du même ordre dans $A_1(\lambda)$ et $B_1(\lambda)$. On peut donc le mettre en facteur :

$$(2,73) \quad Q(\lambda) = \frac{1}{\lambda^{2n}} [H(\lambda) A'_1(\lambda) - B'_1(\lambda)].$$

La condition portant sur les pôles de $Q(\lambda)$ subsiste et on peut substituer, à l'équation (2,73), l'équation :

$$(2,74) \quad \lambda^{2n} Q(\lambda) = H(\lambda) A'_1(\lambda) - B'_1(\lambda)$$

soumise à la même condition (2,38) quant à la position de ces pôles.

L'exemple qui sera traité au paragraphe 2,3.6 montrera comment les calculs doivent être conduits.

2,3.3 Équation équivalente à celle de Wiener Hopf.

Nous considérons maintenant la condition (2,72).

Les expressions (2,40) et (2,41) montrent alors que :

$$(2,75) \quad A_1(\lambda) \equiv B_1(\lambda)$$

et l'équation (2,37) devient de la forme :

$$(2,76) \quad Q(\lambda) = P(\lambda) [H(\lambda) - 1],$$

où $P(\lambda)$ est, dans le cas où il ne peut y avoir corrélation entre la fonction d'entrée et la fonction perturbatrice :

$$(2,77) \quad P(\lambda) = \Phi_{cc}(\lambda) - B(\lambda) \Phi_{cp}(\lambda) - B^*(\lambda) \Phi_{pc}(\lambda) + B(\lambda) B^*(\lambda) \Phi_{pp}(\lambda).$$

Dans la suite, nous supposons à nouveau que :

$$\Phi_{pc}(\lambda) = \Phi_{cp}(\lambda) \equiv 0$$

(simplification d'écriture).

$P(\lambda)$, d'après les hypothèses du paragraphe 2,3.4, peut toujours être considéré comme une fraction *rationnelle*.

Une solution évidente de l'équation (2,76) est $H(\lambda) = 1$; c'est la solution banale qui conduit à une erreur quadratique nulle, l'erreur instantanée serait même nulle si la fonction de transfert $H(\lambda) = 1$, était réalisable.

($H(\lambda) = 1$ conduit à $A_1(\lambda) = K = \infty$). Nous recherchons d'autres solutions qui conduiront nécessairement à une erreur, cette erreur sera minimum.

2,3.4 Unicité de la solution.

Supposons qu'on puisse trouver deux solutions $H_1(\lambda)$ et $H_2(\lambda)$ satisfaisant l'équation (2,76), on aurait :

$$Q_1(\lambda) = P(\lambda) [H_1(\lambda) - 1],$$

$$Q_2(\lambda) = P(\lambda) [H_2(\lambda) - 1],$$

done, on devrait avoir :

$$(2,78) \quad Q_1(\lambda) - Q_2(\lambda) = P(\lambda) [H_1(\lambda) - H_2(\lambda)].$$

Nous allons montrer que l'équation (2,78) ne peut être satisfaite que si $H_1 = H_2$.

Considérons l'équation :

$$Q(\lambda) = P(\lambda) H(\lambda),$$

dans laquelle nous supposons d'abord que le pôle à l'origine de $P(\lambda)$ est d'ordre 2.

Écrivons, comme précédemment (§ 2,25), avec les mêmes notations :

$$(2,79) \quad Q = \frac{A_d \cdot A_g}{\lambda^2 B_d \cdot B_g} \cdot H.$$

La solution de cette équation, qu'on écrira :

$$(2,80) \quad H = \frac{H_1}{A'_g}$$

conduit aux inégalités suivantes :

$$(d^0 H_1) < (d^0 A'_g) \leq (d^0 A_g),$$

ou :

$$(2,81) \quad (d^0 H_1) < (d^0 A_g);$$

l'égalité étant exclue. Puis, pour les mêmes raisons qu'au paragraphe 2,25 :

$$(2,82) \quad (d^0 H_1) \geq (d^0 B_g),$$

enfin :

$$(2,83) \quad (d^0 A_g) < (d^0 B_g) + 1,$$

l'égalité étant exclue.

Compte tenu que H_1 est une fraction rationnelle, on déduit qu'arithmétiquement les inégalités (2,81), (2,82) et (2,83) sont incompatibles.

Il ne peut donc y avoir deux solutions.

Considérons maintenant le cas où le pôle à l'origine de $P(\lambda)$ est d'ordre 4.

On a les inégalités suivantes :

$$(2,84) \quad (d^0 B_g) + 2 > (d^0 A_g);$$

$$(2,85) \quad (d^0 H_1) < (d^0 A_g)$$

que l'on peut même préciser par l'inégalité (2,82) :

$$(2,86) \quad (d^0 A'_g) - (d^0 H_1) \geq 2,$$

qui résulte elle-même des hypothèses faites au paragraphe 2,23, enfin :

$$(2,87) \quad (d^0 H_1) \leq (d^0 B_g).$$

Les inégalités (2,84), (2,86) et (2,87) sont arithmétiquement incompatibles.

L'équation (2,76) a donc une solution unique. On remarquera que les inégalités deviendraient compatibles, si le pôle à l'origine était d'ordre supérieur. Ce cas est impossible dans le domaine des systèmes asservis, à cause de l'expression (2,77).

2,3.5 Solution de l'équation (2,76).

La solution de cette équation découle de ce qui vient d'être fait pour démontrer l'unicité de la solution, soit :

$$(2,88) \quad R(\lambda) = H(\lambda) - 1.$$

Les conditions sur $R(\lambda)$ sont les suivantes :

- a) $R(\lambda)$ ne doit avoir de pôles que dans le demi-plan de gauche;
- b) $R(\lambda) + 1 = H(\lambda)$ doit tendre vers zéro (plus vite que $\frac{1}{r}$, r étant le module de λ);
- c) $R(\lambda)$ doit être choisi de telle façon que $Q(\lambda)$, de l'équation (2,76), n'ait de pôles que dans le demi-plan de droite.

De ces trois conditions on peut bâtir l'expression unique de $R(\lambda)$ lorsqu'on la suppose rationnelle.

On voit :

1° que les zéros de $R(\lambda)$ doivent inclure *tous* les pôles de $P(\lambda)$ qui se trouvent dans le demi-plan de gauche;

2° qu'il est nécessaire d'introduire des pôles à $R(\lambda)$ pour satisfaire la condition b). Ces pôles devant être situés dans le demi-plan de gauche, condition a), il est nécessaire de les choisir parmi les zéros de $P(\lambda)$ situés dans le demi-plan de gauche;

3° qu'il faut que la fraction $R(\lambda)$ tende vers 1 pour $|\lambda| \rightarrow \infty$ et soit au moins du deuxième degré au dénominateur, donc au numérateur.

Le cas général correspondra au cas où le nombre de zéros et de pôles de $P(\lambda)$, situés dans le demi-plan de gauche, ne seront pas égaux.

Il faudra, dans ce cas, introduire un zéro *arbitraire* au numérateur de $R(\lambda)$, ce zéro correspondra, ainsi que nous le verrons sur l'exemple, à une constante jusqu'ici arbitraire.

L'unicité de la solution, démontrée au paragraphe précédent, permet d'affirmer que, dans tous les cas, il sera possible de déterminer cette constante par la condition b).

L'exemple qui est traité au paragraphe 2,3.7 illustre ces faits.

2,3.6 Exemple : solution générale et passage à la limite.

Les valeurs numériques prises dans cet exemple ont été prises de telle façon que les écritures soient simples.

DONNÉES.

Soit un système asservi ⁽¹⁾ tel que celui représenté *figure 23*.

(1) Cet exemple correspond à des données sensiblement équivalentes à celles de l'exemple indiqué par R. S. PHILLIPS [3]. Rappelons que la méthode exposée ici est complètement différente de la sienne.

FONCTION D'ENTRÉE.

Considérons un radar de poursuite fonctionnant en « poursuite automatique ». On peut considérer en première approximation que la vitesse angulaire du but est constante durant ΔT seconde, puis change brusquement de valeur.

Pour simplifier, nous supposons que les vitesses angulaires que le but est susceptible de prendre, ne peuvent être que $+\Omega$ et $-\Omega$. Les instants auxquels ces changements ont lieu étant répartis au hasard avec une probabilité égale.

Nous admettrons le théorème ergodique : si $y(t)$ est une fonction aléatoire stationnaire dont on connaît également la loi de probabilité en amplitude $p(y)$, on a :

$$(2,89) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} y(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} yp(y) dy;$$

on peut trouver une expression de la fonction d'autocorrélation en partant de la moyenne au sens des probabilités, soient, en effet a_i et b_j les $i^{\text{èmes}}$ et $j^{\text{èmes}}$ segments portés sur deux ordonnées quelconques distantes de τ . On peut considérer qu'on a décomposé l'enregistrement initial en une succession « d'échantillons » ⁽¹⁾ (ou épreuves). Sur chacun de ceux-ci, on prend une ordonnée de référence et une autre décalée de τ . Ces deux ordonnées sont divisées en petits segments d'amplitude quelconque

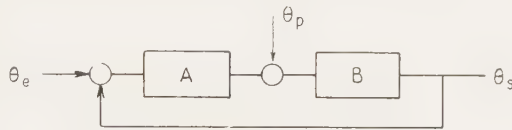


Fig. 23

et contigus. Sur la première ordonnée, on caractérise la fonction de la courbe par l'indice i du segment a_i , où la courbe coupe cette ordonnée, et sur la seconde par l'indice j du segment b_j , où la courbe coupe cette seconde ordonnée. Partant d'un nombre fini d'échantillons puis passant à la limite, on obtient sans difficulté :

$$(2,90) \quad \varphi_{ee}(\tau) = \sum a'_i b_j p_{a_i} p_{b_j}^{a_i} \Big|_{\tau},$$

où p_{a_i} est la probabilité que la courbe coupe le premier axe sur le segment a_i ;

$p_{b_j}^{a_i} \Big|_{\tau}$ la probabilité conditionnelle que la courbe coupe le second axe décalé de τ par rapport au premier, sur le segment b_j , sachant que la courbe a coupé le premier axe sur le segment a_i .

Dans l'exemple étudié, les deux amplitudes possibles sont $+\Omega$ et $-\Omega$ avec des probabilités égales. D'autre part, il est normal d'admettre que la probabilité, pour qu'il y ait changement dans l'intervalle dt , est infiniment petite. Dans ces conditions, la probabilité d'avoir n changements dans un intervalle de temps τ est :

$$(2,91) \quad p(n, \tau) = \frac{(k\tau)^n}{n!} e^{-k\tau}$$

(k : nombre moyen de changements dans l'unité des temps).

(1) Nous reprendrons cette méthode de calcul d'une fonction d'autocorrélation, en détails, au chapitre suivant.

On déduit de cette loi, la fonction d'autocorrélation (ces calculs seront détaillés chap. III) et le spectre de la fonction d'entrée :

$$(2,92) \quad \begin{aligned} \varphi_{ee}(\tau) &= \Omega^2 e^{-2k|\tau|}, \\ \Phi_{ee}(\omega) &= \frac{\Omega^2}{\pi} \frac{2k}{(2k)^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Prenons comme spectre de la fonction perturbatrice un spectre correspondant à un « bruit-blanc » :

$$(2,93) \quad \Phi_{pp}(\omega) = \text{Cte} = l.$$

Supposons, enfin, que $B(\lambda)$ se réduise à une inertie sans frottement ⁽¹⁾ :

$$(2,94) \quad B(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Nous prenons comme fonction de sortie « désirée » une fonction telle que :

$$\theta_d(t) = \theta_e(t + T)$$

qui correspond à une fonction prédite ou retardée par rapport à la fonction d'entrée.

L'équation (2,39) nécessite le calcul de $\Phi_{ed}(\lambda)$ que l'on obtient à partir de $\varphi_{ed}(\tau)$:

$$(2,92) \quad \varphi_{ed}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \theta_e(t) \theta_e(t + T + \tau) dt = \varphi_{ee}(\tau + T);$$

$$(2,93) \quad \Phi_{ed}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda\tau} \varphi_{ee}(\tau + T) d\tau = \Phi_{ee}(\lambda) \cdot e^{-\lambda T}.$$

Afin de simplifier les écritures, nous prendrons des valeurs numériques telles que :

$$2k = \sqrt{\frac{13}{36}}, \quad \frac{\Omega^2}{\pi} = 1, \quad l = \sqrt{36 \cdot 13}.$$

Dans ces conditions, l'équation (2,37) s'écrit :

$$(2,94) \quad Q(\lambda) = H(\lambda) \sqrt{\frac{36\lambda^4 - 13\lambda^2 + 36}{13}} e^{-\lambda T} \sqrt{\frac{36}{13 + \lambda^2}} + \sqrt{\frac{36}{13}} \frac{13}{\lambda^4}.$$

(1) Nous n'introduisons pas d'amortissement pour simplifier les calculs.

Mais nous n'introduirons pas de couple de rappel, volontairement, pour avoir un pôle à l'origine et nous placer dans un cas plus compliqué. Ce cas correspond d'ailleurs, avec une bonne approximation, à une antenne radar de poursuite; les perturbations indiquées correspondraient au vent agissant sur elle.

qu'on écrit, après avoir tenu compte que :

$$\lambda^4 - 13\lambda^2 + 36 = (\lambda + 2)(\lambda - 2)(\lambda + 3)(\lambda - 3)$$

$$(2,95) \quad Q(\lambda) = \frac{\lambda^4 \left(\sqrt{\frac{36}{13}} - \lambda \right)}{(\lambda - 2)(\lambda - 3)}$$

$$\sqrt{\frac{36}{13}} \left[\Pi(\lambda) \frac{(\lambda - 2)(\lambda + 3)}{\left(\lambda + \sqrt{\frac{36}{13}} \right)} - \frac{\lambda^4 e^{-\lambda\tau} - 13\lambda^2 + 36}{\left(\lambda + \sqrt{\frac{36}{13}} \right)(\lambda - 2)(\lambda - 3)} \right].$$

En posant :

$$(2,96) \quad \Psi^*(\lambda) = \frac{\lambda^4 e^{-\lambda\tau} - 13\lambda^2 + 36}{\left(\lambda + \sqrt{\frac{36}{13}} \right)(\lambda - 2)(\lambda - 3)}.$$

On déduit :

$$(2,97) \quad \psi(t) = \int_c \frac{\lambda^4 e^{-\lambda\tau} - 13\lambda^2 + 36}{\left(\lambda + \sqrt{\frac{36}{13}} \right)(\lambda - 2)(\lambda - 3)} e^{\lambda t} d\lambda.$$

Soit :

$$(2,98) \quad \psi(t) = \int_c \frac{\lambda^4 e^{\lambda(t-\tau)}}{D} d\lambda - 13 \int_c \frac{\lambda^2 e^{\lambda t}}{D} d\lambda + 36 \int_c \frac{e^{\lambda t}}{D} d\lambda,$$

où D est le dénominateur de l'équation (2,96).

Après intégration, on trouve :

$$(2,99) \quad \psi(t) = 2\pi \left[\underbrace{-81 \frac{e^{3t}}{\sqrt{\frac{36}{13}} + 3} (e^{-3\tau} + 1)}_{\text{pour } t < 0} + \underbrace{\frac{16 e^{2(t-\tau)}}{\sqrt{\frac{36}{13}} + 2} - 81 \frac{e^{3(t-\tau)}}{\sqrt{\frac{36}{13}} + 3}}_{\text{pour } t < T \text{ seulement}} \right. \\ \left. + \underbrace{\left(\frac{36}{13} \right)^2 \frac{e^{-\sqrt{\frac{36}{13}}(t-\tau)}}{\left(2 + \sqrt{\frac{36}{13}} \right) \left(3 + \sqrt{\frac{36}{13}} \right)}}_{\text{pour } t > T \text{ seulement}} \right].$$

On obtient $H(\lambda)$ par l'équation (2,64), qui donne ici :

$$(2,100) \quad H(\lambda) = \frac{\lambda + \sqrt{\frac{36}{13}}}{(\lambda + 2)(\lambda + 3)} \left[\frac{\left(\frac{36}{13}\right)^2 e^{\sqrt{\frac{36}{13}}T}}{\left(2 + \sqrt{\frac{36}{13}}\right)\left(3 + \sqrt{\frac{36}{13}}\right)\left(\lambda + \sqrt{\frac{36}{13}}\right)} e^{+\sqrt{\frac{36}{13}}T} \right. \\ \left. + \frac{16}{\sqrt{\frac{36}{13}} + 2} - e^{-2T} \frac{e^{(\lambda-2)T} - 1}{\lambda - 2} - \frac{81}{\sqrt{\frac{36}{13}} + 3} e^{-3T} \frac{e^{(\lambda-3)T} - 1}{\lambda - 3} \right].$$

L'équation (2,100) correspond au cas où un certain retard, ou une certaine avance par rapport au message (fonction d'entrée), T , particularise la sortie désirée.

PASSAGE A LA LIMITE : $T \rightarrow 0$.

On retrouve une sortie « désirée » identique à la fonction d'entrée :

$$\theta_d(t) = \theta_e(t).$$

Faisant $T \rightarrow 0$ dans l'équation (2,100), on trouve :

$$(2,101) \quad H(\lambda) = \frac{\left(\frac{36}{13}\right)^2}{(\lambda + 2)(\lambda + 3)\left(2 + \sqrt{\frac{36}{13}}\right)\left(3 + \sqrt{\frac{36}{13}}\right)};$$

c'est la fonction de transfert cherchée, dans le cas des servomécanismes :

$$(2,102) \quad H(\lambda) = 0,45 \frac{1}{(\lambda + 2)(\lambda + 3)};$$

tenant compte des équations (2,14), on déduit la fonction de transfert du réseau correcteur $A(\lambda)$:

$$(2,103) \quad A(\lambda) = \frac{0,45 \lambda^2}{(\lambda + 2)(\lambda + 3) - 0,45}.$$

2,3.7 Même exemple, solution directe.

Nous partons de l'équation (2,76) qui s'écrit ici, en tenant compte de la décomposition qui a été faite au paragraphe 2,3.6 :

$$(2,104) \quad Q(\lambda) = \frac{(\lambda + 2)(\lambda - 2)(\lambda + 3)(\lambda - 3)}{\lambda^4 \left(\lambda + \sqrt{\frac{36}{13}} \right) \left(\lambda - \sqrt{\frac{36}{13}} \right)} [H(\lambda) - 1],$$

c'est l'équation à (2,94).

Posons :

$$(2,105) \quad R(\lambda) = H(\lambda) - 1.$$

Les conditions nécessaires conduisent à poser :

$$(2,106) \quad R(\lambda) = k \frac{\left(\lambda + \sqrt{\frac{36}{13}} \right)}{(\lambda + 2)(\lambda + 3)};$$

mais ainsi la condition *b*), du paragraphe 2,3.5, n'est pas vérifiée. On pourra la vérifier en ajoutant un zéro; soit $(\lambda + u)$ ce zéro, u étant pour l'instant arbitraire :

$$(2,107) \quad R(\lambda) = k \frac{\left(\lambda + \sqrt{\frac{36}{13}} \right) (\lambda + u)}{(\lambda + 2)(\lambda + 3)}.$$

La condition *b*), du paragraphe 2,3.5, conduit tout d'abord à :

$$k = -1;$$

ensuite, le calcul de $H(\lambda)$ montre que :

$$(2,108) \quad H(\lambda) = \frac{(\lambda + 2)(\lambda + 3) - \left(\lambda + \sqrt{\frac{36}{13}} \right) (\lambda + u)}{(\lambda + 2)(\lambda + 3)};$$

pour que $H(\lambda)$ tende vers zéro pour $|\lambda| \rightarrow \infty$ plus vite que $\frac{1}{|\lambda|}$, il faut annuler le coefficient du terme en λ au numérateur de l'équation (2,108), ce qui détermine u :

$$u = 5 - \sqrt{\frac{36}{13}},$$

qui conduit à :

$$(2,109) \quad H(\lambda) = \frac{6 - \sqrt{\frac{36}{13}} \left(5 - \sqrt{\frac{36}{13}} \right)}{(\lambda + 2)(\lambda + 3)} = \frac{0,45}{(\lambda + 2)(\lambda + 3)},$$

solution identique à celle donnée par le passage à la limite [éq. (2,102)].

2,3.8 Conclusions.

Cet exemple montre que les calculs conduisant à la détermination de la fonction de transfert $H(\lambda)$, que l'on aurait pu craindre longs et compliqués, sont extrêmement simples.

Cette méthode prend donc tout son intérêt pour la synthèse des réseaux correcteurs de systèmes asservis, soumis à des ordres et à des perturbations aléatoires stationnaires.

On rappelle cependant que cette méthode exige la linéarité des éléments du système.

Le chapitre suivant étend cette méthode de calcul aux systèmes possédant un élément non-linéaire du type relais (les commandes des moteurs par relais sont très fréquentes dans les systèmes asservis). Bien entendu, la non-linéarité nécessite une connaissance plus complète des propriétés statistiques de la fonction d'entrée du système; nous verrons que la seule connaissance de la fonction d'autocorrélation de la fonction d'entrée ne suffit plus.

CHAPITRE III

ÉTUDE PARTICULIÈRE DES RELAIS

3,1 REMARQUES SUR L'UTILISATION DES RELAIS

3,1.1 Définitions.

Par relais nous entendons un système électromagnétique mécanique constitué essentiellement d'une ou plusieurs bobines, d'un circuit magnétique métallique, sur lequel nous reviendrons, et d'un certain nombre de contacts.

Un contact est dit ouvert, si le courant ne peut pas passer, fermé dans le cas contraire.

Un contact est dit « *contact travail* » (ou aussi position « travail »), lorsque ce contact est fermé par excitation du relais. Le contact est dit « *contact repos* » s'il est normalement fermé lorsque la bobine de l'électro-aimant n'est pas excitée.

La palette du relais est l'organe mobile dans le champ magnétique de l'électro-aimant et sous son action. Souvent, la palette porte le ou les contacts.

3,1.2 Différentes utilisations.

On peut distinguer plusieurs catégories d'usage du relais :

— tout d'abord les relais de *servitude* ou de *sécurité*. Si l'on veut commander plusieurs interrupteurs éventuellement distants les uns des autres, par une seule commande, on utilise avantageusement des relais connectés en série. Les circuits ainsi commandés conservent leur autonomie et ne sont pas influencés par la fermeture ou l'ouverture des voisins (relais de servitude). Si l'on veut fermer ou ouvrir un circuit susceptible d'être porté à un potentiel élevé (H.T. des postes émetteurs, interrupteur d'antenne) ou si l'on veut couper un circuit susceptible d'être parcouru par une forte intensité, on a intérêt, du point de vue *sécurité*, à utiliser un relais (relais de sécurité). Ce relais peut être placé en un lieu éloigné du pupitre de commande, où, éventuellement, des moyens de protection peuvent être mis en œuvre.

Nous ne nous occuperons pas de ces deux catégories de relais pour lesquelles une étude statistique n'apporterait guère de nouveautés.

RELAIS AMPLIFICATEURS DYNAMIQUES DE PUISSANCE.

La simplicité relative du relais conduit à les utiliser fréquemment comme amplificateur de puissance. Le *signal* de commande (tension) est appliqué aux bornes de la bobine de l'électro-aimant. La réponse du relais est constituée par la position dans le temps de la palette porte-contact. En fait, la connaissance des instants auxquels un contact est *ouvert* ou *fermé* seule importe; mais, il est en général nécessaire de tenir compte du temps de passage de la position *fermé* à la position *ouvert* et vice versa. Ce temps est une fonction dépendant de nombreuses variables : intensité, dérivées de l'intensité, amortissement mécanique, état précédent, vieillissement des métaux, hystérésis, etc., c'est une fonction aléatoire.

Le relais constitue un amplificateur d'énergie en ce sens que la puissance qu'il est à même de contrôler peut être de 10^6 à 10^8 fois supérieure à la puissance du signal de commande. C'est le gain statique du relais. Si le signal de commande est susceptible de varier dans le temps, un certain retard apparaît entre les instants où le signal déclenche un changement de position et où ce changement apparaît.

Très souvent un organe *détecteur* est suivi d'un relais amplificateur afin de réduire au maximum la puissance délivrée par le détecteur. Ce dernier sera d'autant plus sensible et fidèle qu'il délivrera moins d'énergie.

3.1.3 Seuil.

Une caractéristique importante du relais est *son seuil*, c'est l'intensité minimum qu'il faut faire passer dans la bobine de l'électro-aimant, pour que la palette mobile change de position. En général, les relais sont construits de façon à avoir deux ou trois positions d'équilibre *stable* (hormis les « sélecteurs » qui peuvent en avoir plusieurs dizaines; ils s'apparentent plutôt à des moteurs pas-à-pas). La forme de l'entrefer est telle que, si l'intensité du courant dans la bobine atteint ou dépasse une certaine valeur de façon à annuler la force antagoniste (ressort ou rappel magnétique), la palette quitte sa position initiale devenue instable et va vers une autre position stable. La force à laquelle la palette est soumise, croît au cours du mouvement (mouvement instable). Des dispositifs électriques tendent à limiter cette force dans les derniers instants, il faut éviter, en effet, que les contacts rebondissent après le premier choc. Nous reviendrons sur cette question au paragraphe 3,3.2.

Ce seuil est assez variable et doit être considéré comme une variable aléatoire dont la valeur moyenne est, en général, seule considérée. On peut cependant attacher une loi de probabilité ou une fonction de répartition à la notion du seuil d'intensité. Il faut cependant remarquer que cette loi est difficile à déterminer expérimentalement d'une façon systématique à cause du grand nombre de paramètres dont ce seuil dépend. On pourrait, en effet, imaginer une intensité « en dents de scie », linéairement croissante, appliquée aux bornes d'un relais (*fig. 24*).

La *fermeture* du contact déclencherait instantanément la lecture de mesure de l'intensité, la suite ainsi obtenue serait la suite aléatoire des seuils en intensité d'un relais. On pourrait objecter que la mesure instantanée d'une intensité variable est

difficile et, en général, entachée d'une erreur importante. En fait, on peut ramener la mesure de l'intensité à celle d'un temps, qui peut être faite, à 10^{-6} s près, à l'aide d'oscillateur à quartz (horloge) et de décades électroniques totalisatrices. Le problème est alors d'obtenir une linéarité parfaite dans la formation de la dent de scie.

Ce dispositif ne donnerait pas les résultats attendus pour les raisons suivantes :

a) le relais n'est pas un système linéaire (au sens du § 1,1.1), le passé intervient, mais le principe de superposition n'est pas applicable. Cette remarque sera reprise en détail plus loin;

b) le domaine qui nous intéresse correspond à des intensités essentiellement aléatoires, tant en amplitude qu'en répartition des zéros (instants de nullité de l'intensité). Il faudrait donc étudier la répartition des instants en faisant varier, d'une façon aléatoire, la *pente* de la fonction « en dents de scie »;

c) la fréquence de récurrence du phénomène devrait également varier dans le temps et d'une façon aléatoire;

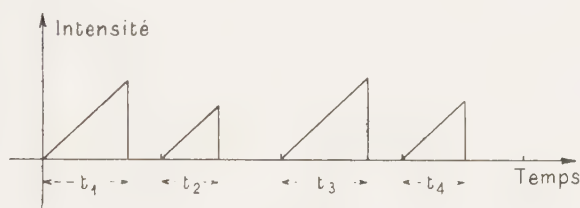


Fig. 21

d) la considération d'un signal pur (sans bruit superposé) est une fiction. Tout signal réel est nécessairement mélangé à un bruit qui, par nature même, ne peut être défini que statistiquement. Or, ce qui intervient à un instant t , pour décider de la fermeture ou non du relais, ce n'est pas la valeur instantanée de la fonction de commande; il faut une certaine *énergie* pour déplacer la palette : cette énergie peut provenir, soit du signal, soit du bruit. Ce point sera repris en détail au paragraphe 3,3.4.

Il résulte de ceci que le mode opératoire le plus satisfaisant consiste à exciter le relais par un signal aléatoire, un bruit thermoélectrique ou thermoïonique, par exemple, convenablement amplifié (voir chap. V).

3,1.4 Non-linéarité.

Revenons sur la non-linéarité du relais. Schématisons un relais à deux positions par les relations suivantes :

$$y = +1, \text{ si le relais est fermé;}$$

$$y = 0, \text{ s'il est ouvert.}$$

En première approximation, si l'on considère la valeur moyenne ε du retard du relais et s la valeur moyenne du seuil d'intensité du relais, on aura :

$$(3,1) \quad \begin{cases} y(t + \varepsilon) = +1, & \text{si } f(t) - s > 0, \\ y(t + \varepsilon) = 0, & \text{si } f(t) - s < 0; \end{cases}$$

$f(t)$ étant le signal de commande.

Les équations et conditions telles que 3,1 ne sont pas « linéaires ». Elles sont valables dans le cas où ε et s ne sont plus des valeurs *moyennes* mais des valeurs instantanées appartenant aux suites aléatoires ε et s .

Il est à remarquer que ces deux suites sont en dépendance stochastique, en général. La corrélation entre les ε et les s n'est pas nulle.

Enfin, parmi le groupe de relais que nous avons retenu, nous distinguerons deux classes :

a) LES RELAIS DE « *signe* ».

Le signal de commande est susceptible de prendre des valeurs nettement positives ou négatives, c'est-à-dire des valeurs toujours grandes par rapport au seuil d'intensité du relais. En conséquence, les changements de signes sont très rapides par rapport au retard moyen du relais. Cette fonction du relais est souvent utilisée dans les machines à calculer;

b) LES RELAIS « *balance* ».

Le signal de commande est constitué alors par la superposition de plusieurs signaux, qui sont additionnés algébriquement par les bobines de l'électro-aimant et donnent un flux résultant dans le circuit magnétique du relais. La différence essentielle entre ces relais et les relais de signe est qu'ils travaillent toujours au voisinage de leur seuil. Prenons, en effet, le cas d'un pilote automatique (Siemens K 12, S.F.E.N.A., etc.). Le détecteur (gyromètre) envoie un ordre qui est proportionnel à φ' vitesse de rotation de l'avion. L'utilisation de φ' , seul pour commander les moteurs de gouverne conduit à une instabilité. Il est nécessaire de considérer un signal formé de φ' , de la dérivée φ'' et, pour d'autres raisons, de son intégrale φ . On considère, en général, une combinaison linéaire de ces trois grandeurs. Dès que le signal ainsi formé atteint le seuil du relais-balance, celui-ci ferme un contact qui commande — par des intermédiaires éventuellement — le moteur de gouverne. Celles-ci agissent et tendent à donner à l'avion une vitesse de rotation — φ' . Pour le vol de croisière (sans évolution), le relais-balance oscille constamment d'un contact à l'autre à une fréquence relativement grande.

Il va de soi que l'on peut « déplacer le zéro » du relais en créant, à l'aide d'une bobine supplémentaire, un flux constant qui s'ajoutera aux flux des autres bobines. C'est notamment le cas en pilotage « latéral » (virage commandé par le pilote automatique).

3,2

RELAIS DE SIGNE

3,2.1 Remarque préliminaire.

La distinction que nous faisons entre relais de signe et relais-balance ne correspond pas nécessairement à deux réalisations du point de vue mécanique ou électrique. Un même relais joue bien souvent les deux fonctions simultanément, on lui demande de reconnaître le signe du flux total avec un seuil ε donné.

Cependant, il est fréquent que l'on puisse trouver une fonction principale à un relais et c'est ce qui justifie cette distinction. Nous envisageons d'abord le cas du relais de signe qui est beaucoup plus simple.

3,2.2 Problème.

En vertu de la remarque du paragraphe 3,1, on peut toujours supposer que le relais agit autour du zéro de la fonction de commande. Par fonction de commande, nous entendons l'ensemble des *tensions* appliquées aux bornes des différentes bobines

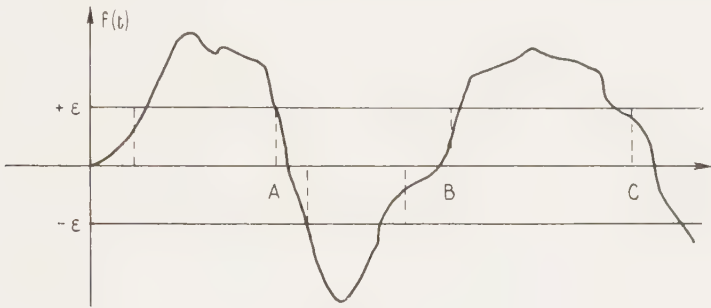


Fig. 25

de l'électro-aimant. Par exemple, dans le cas d'un servomécanisme, on aura fréquemment à connaître le signe d'une quantité telle que :

$$(3,2) \quad k_1 \varphi + k_2 \frac{d\varphi}{dt},$$

où φ est la grandeur directement mesurée et φ' est déduit de φ par différentiation (ou réciproquement). Deux tensions proportionnelles à $k_1 \varphi$ et $k_2 \frac{d\varphi}{dt}$ sont appliquées aux bornes des bobines du relais. La fonction de commande est :

$$k_1 \varphi + k_2 \frac{d\varphi}{dt}.$$

Le relais considéré agissant comme relais de signe, nous supposons que le flux résultant est nettement *positif* ou *négatif*, c'est-à-dire que les vitesses de variation de la fonction de commande en fonction du temps sont très grandes au voisinage du zéro, par rapport à la constante de temps du relais.

Le problème consiste à calculer le spectre de la fonction de sortie, connaissant le minimum de propriétés statistiques de la fonction de commande (fonction d'entrée).

Nous envisagerons différents cas possibles.

Soit $f(t)$ une épreuve d'une fonction aléatoire supposée stationnaire (fig. 25).

Suivant le type de relais (à trois positions stables ou à deux) on peut avoir une fonction de sortie qui prend les valeurs $+1, 0, -1$ ou $+1, 0$. Des changements de positions, représentés par A, par exemple, ne sont pas envisagés ici, la valeur 0 n'est donc jamais prise.

Le problème revient donc à calculer le spectre ou la fonction d'autocorrélation de l'une des fonctions représentées (fig. 26).

On remarque que l'on passe de la figure de gauche à la figure de droite par une affinité verticale de module 2, suivie d'une translation d'amplitude -1 . Puisque le calcul d'une fonction d'autocorrélation n'est pas affecté par cette translation, nous nous placerons dans l'un ou l'autre cas suivant la simplicité des calculs.

3,2,3 Cas où la constante de temps du relais peut être négligée.

On peut alors calculer très simplement le spectre de la fonction de sortie $f_s(t)$ à partir de l'unique donnée, exprimant la probabilité d'avoir n zéros de la fonction

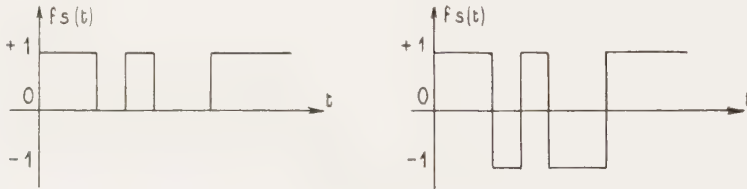


Fig. 26

d'entrée $f_e(t)$, dans un intervalle de temps τ ; soit $p(n, \tau)$ cette fonction. Partant de l'équation (2,90), établie au paragraphe 2,3,6 :

$$(3,3) \quad \varphi_{11}(\tau) = \sum a_i p_{a_i} b_j p_{b_j}^{a_i} \Big|_{\tau},$$

dans laquelle :

$$p_{b_j}^{a_i} \Big|_{\tau} = +1 \quad \text{ou} \quad -1.$$

$p_{b_j}^{a_i} \Big|_{\tau}$, probabilité d'avoir, sur une ordonnée décalée de τ s par rapport à celle portant les a_i , la valeur b_j sachant que a_i a été obtenu.

Si la valeur moyenne de la fonction de commande est nulle, on en déduit que les probabilités d'obtenir $+1$ ou -1 pour la fonction de sortie sont égales.

Donc, si l'on connaît la loi $p(n, \tau)$, toujours susceptible d'être connue à partir de l'enregistrement d'une épreuve de la fonction aléatoire considérée, on en déduit, par les mêmes raisonnements que ceux du paragraphe 3,3,1, la fonction d'autocorrélation :

$$(3,4) \quad \varphi_{ss}(\tau) = \sum_{0,2,4,\dots}^{\infty} p(n, \tau) + \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} p(n, \tau) = \sum_n p(n, \tau).$$

En particulier, si la distribution des zéros suit une loi de Poisson, on a vu que :

$$(3,5) \quad p(n, \tau) = \frac{(k\tau)^n}{n!} e^{-k\tau},$$

où k est le nombre moyen de zéros par unité de temps et :

$$(3,6) \quad \varphi_{ss}(\tau) = e^{-sk|\tau|}$$

si la valeur moyenne de la fonction commande n'est pas nulle, on peut décomposer celle-ci en une composante continue et une composante aléatoire à valeur moyenne nulle. Il s'ensuit que les probabilités p_{ai} de l'équation (3,3) ne sont plus égales à $1/2$.

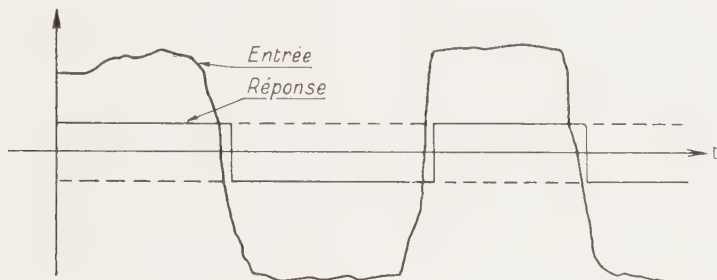


Fig. 27

Il faut faire le calcul de proche en proche, nous le détaillerons au paragraphe suivant.

3,2,4 Cas où on ne néglige pas la constante de temps moyenne du relais.

Nous introduirons la constante de temps θ_1 , relative à l'ouverture du contact étudié (par suite de la mise sous tension de relais), et la constante de temps θ_2 , relative à la fermeture de l'autre contact (par suite de coupure de la tension sur relais) (fig. 27). En général :

$$(3,7) \quad \theta_2 \gg \theta_1.$$

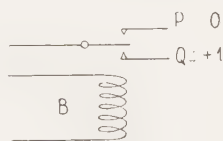


Fig. 28

La raison de cette différence est simple, considérons le relais représenté par la figure 28 :

— la fonction de sortie peut être considérée comme étant égale à $+1$, si le contact est fermé; à 0 , s'il est ouvert.

La constante θ_1 (ouverture du contact) correspond presque uniquement au retard à la coupure de la bobine B. La self de la bobine B intervient ainsi que la forme de l'entrefer.

Au contraire, la constante θ_2 correspond au retard à l'établissement du courant dans la bobine B et au temps de transit de la palette de la position de repos P à la position, « contact fermé Q ». On remarquera cependant que les temps de retard à la coupure

et à l'établissement du courant ne sont pas égaux (le premier est plus grand que le second), puisque les réluctances magnétiques initiales ne sont pas les mêmes.

Envisageons d'abord le cas où le signal de commande a une valeur moyenne nulle. Le signal de sortie, supposé oscillant entre $+1$ et -1 , n'a plus une valeur moyenne nulle. Sa valeur moyenne par unité de temps est précisément proportionnelle à :

$$\theta_2 - \theta_1.$$

Cette grandeur n'est pas négligeable par rapport à l'inverse du nombre moyen de zéros par unité de temps. C'est la cause principale de la dérive du zéro des moteurs électriques, commandés par relais, sous une excitation sinusoïdale.

Le relais que nous avons choisi pour ces études est un relais à performances très ordinaires. Bien qu'un matériel spécial ait été étudié et sera construit pour l'étude des relais à performances élevées (matériel décrit au chap. IV), il a été plus simple et surtout beaucoup plus rapide d'utiliser les matériels existants pour la plupart des mesures dont nous avons besoin. C'est la raison qui nous a fait choisir, pour toutes les études de principe, le relais : 19-9004 - E2 (licence Bosch et Michel).

Ce relais, étudié au chronographe imprimant Belin, a donné les résultats suivants :

- constante de temps moyenne θ_1 (ouverture du contact repos) = 4 ms;
- constante de temps moyenne θ_2 (fermeture du contact travail) = 20 ms.

Cette dissymétrie des constantes de temps est *cumulative* et, alors qu'il est possible de négliger θ_1 , ou θ_2 par rapport à l'inverse du nombre moyen de zéros par unité de temps, lorsqu'on s'intéresse au phénomène sur un *court* intervalle de temps, il n'est pas correct de négliger $\theta_2 - \theta_1$ car, après un temps t , l'énergie des impulsions positives et négatives diffère — à un facteur de proportionnalité près — de $(\theta_2 - \theta_1) t$. C'est un phénomène analogue, quant aux résultats, à la dérive des amplificateurs à courant continu.

3.2.5 Cas général.

DONNÉES.

Nous considérerons, pour simplifier l'écriture, le cas d'un relais non polarisé schématisé (*fig. 28*).

Le signal de commande peut être schématisé par une onde carrée dont l'amplitude serait égale au seuil du relais. Une onde positive, de durée supérieure à la constante de temps de fermeture du relais θ_2 , provoque la fermeture du contact ($+1$). Une onde négative provoque l'ouverture du relais. Ce schéma peut être considéré comme général en vertu de la remarque finale du paragraphe 3.2.2.

Considérons deux ordonnées A et B, distance de τ (*fig. 29*), l'abscisse de A étant arbitraire. On rappelle qu'on suppose le signal de commande aléatoire stationnaire.

Les ordonnées A et B sont divisées en petits segments. On appellera a_i l'ordonnée du signal de commande sur l'axe A, a'_i celle du signal réponse sur le même axe, b_j et b'_j les ordonnées des signaux de commande (entrée) et de sortie sur l'axe B. a_i et b_j ne peuvent valoir que $\pm s$, s étant une constante directement liée au seuil. a'_i et b'_j ne peuvent prendre que les valeurs 1 ou 0 suivant que le relais est fermé ou ouvert.

Considérons l'axe A. La valeur du signal de sortie est donnée par le tableau ci-dessous :

$$a'_i \left\{ \begin{array}{ll} +1 & \text{si } a_i = +s \text{ depuis plus de } \theta_2 \text{ s;} \\ 0 & \text{si } a_i = +s \text{ depuis moins de } \theta_2 \text{ s;} \\ 0 & \text{si } a_i = -s \text{ depuis plus de } \theta_1 \text{ s;} \\ +1 & \text{si } a_i = -s \text{ depuis moins de } \theta_1 \text{ s.} \end{array} \right.$$

Les ordonnées a'_i sont ainsi exprimées en fonction des ordonnées a_i et de θ_1 et θ_2 .

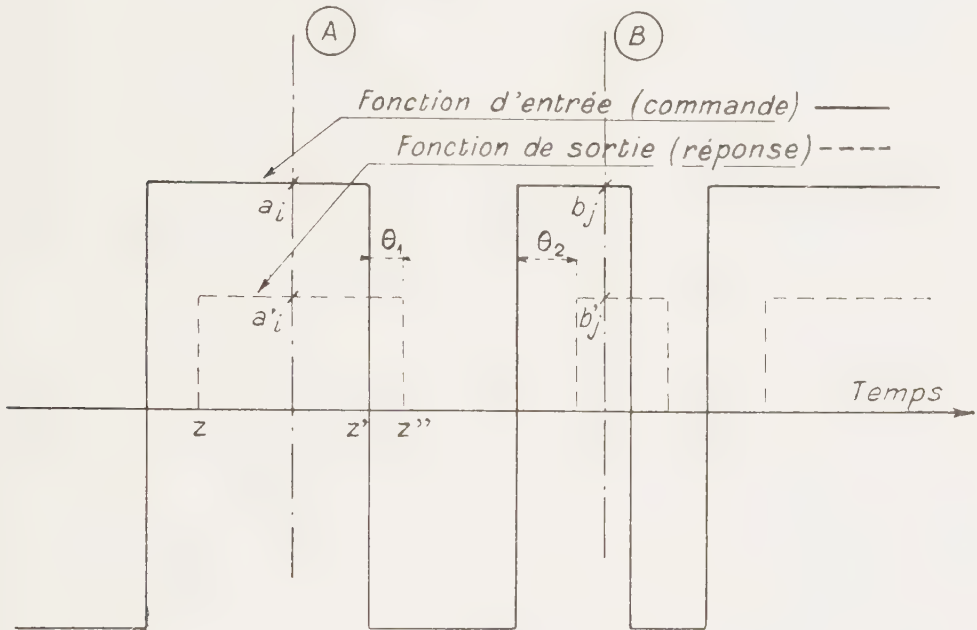


Fig. 29

On ferait le même raisonnement pour l'axe B. La correspondance, entre les a'_i et b'_j et les a_i et b_j , est résumée dans le tableau ci-dessous :

$$a'_i \left\{ \begin{array}{ll} +1 & \text{si } a_i = +s \text{ depuis plus de } \theta_2 \text{ s} \dots b'_j = \left\{ \begin{array}{ll} +1 & \text{si } b_j = +s \text{ depuis plus de } \theta_2 \text{ s;} \\ 0 & \text{si } b_j = +s \text{ depuis moins de } \theta_2 \text{ s;} \\ 0 & \text{si } b_j = -s \text{ depuis plus de } \theta_1 \text{ s;} \\ +1 & \text{si } b_j = -s \text{ depuis moins de } \theta_1 \text{ s;} \end{array} \right. \\ \\ 0 & \text{si } a_i = +s \text{ depuis moins de } \theta_2 \text{ s} \dots b'_j = \left\{ \begin{array}{l} \text{mêmes résultats;} \end{array} \right. \\ \\ 0 & \text{si } a_i = -s \text{ depuis plus de } \theta_1 \text{ s} \dots b'_j = \left\{ \begin{array}{l} \text{mêmes résultats;} \end{array} \right. \\ \\ +1 & \text{si } a_i = -s \text{ depuis moins de } \theta_1 \text{ s} \dots b'_j = \left\{ \begin{array}{l} \text{mêmes résultats.} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

La fonction d'autocorrélation du signal de sortie déduite de l'expression générale :

$$\varphi_{ss}(\tau) = \sum_{ij} a'_i p_{a'_i} b'_j p_{b'_j} \Big|_{\tau}$$

est :

$$(3,8) \quad \varphi_{ss}(\tau) = \sum_{ij} p_{a_i} p_{b_j} \Big|_{\tau} = \sum_{ij} p(a'_i b'_j).$$

$p(a'_i, b'_j)$ étant la probabilité composée d'avoir à la fois a'_i sur la première ordonnée et b'_j sur la seconde. Ces deux ordonnées étant séparées par τ . Mais, puisque les seules valeurs non nulles de a'_i et b'_j sont $+1$ et -1 , la fonction d'autocorrélation se réduit à :

$$(3,9) \quad \varphi_{ss}(\tau) = p(+1, +1),$$

probabilité d'avoir un signal de sortie $+1$ et $+1$ sur les deux ordonnées A et B distantes de τ .

Évaluons cette probabilité à partir des données statistiques relatives au signal d'entrée.

Du tableau précédent, on déduit :

$$(3,10) \quad p(+1, +1) = p_{a_i=+s \atop +\theta_1} \left(p_{b_j=+s \atop +\theta_2}^{a_i=+s} + p_{b_j=+s \atop -\theta_1}^{a_i=-s} \right) + p_{a_i=-s \atop -\theta_1} \left(p_{b_j=-s \atop +\theta_2}^{a_i=-s} + p_{b_j=-s \atop -\theta_1}^{a_i=+s} \right),$$

où, par exemple :

$p_{b_j=+s \atop +\theta_2}^{a_i=+s}$ signifie « probabilité conditionnelle d'avoir $b_j = +s$ depuis *plus* de θ_2 s sachant que a_i était égal à $+s$ ».

Évaluons ces probabilités :

— nous supposons connue la loi $p(n, t)$ d'avoir n zéros dans l'intervalle de temps t ; soit, d'autre part, k le nombre moyen des zéros par unité de temps. Enfin, supposons que la fonction de commande ait une valeur moyenne nulle, ceci s'exprime par :

$$p_{a_i=s} = \frac{1}{2}, \quad p_{b_j=s} = \frac{1}{2}.$$

La durée *moyenne* de chaque impulsion positive est $\frac{1}{k}$ s et la probabilité qu'une impulsion (positive ou négative), soit égale à $\frac{1}{n}$ s, est donnée par la loi $p(n, t)$ supposée connue.

Évaluons d'abord :

$$p_{a_i=+s \atop +\theta_2}$$

C'est le *produit* des deux probabilités suivantes :

$p_{a_i=+s}$ (probabilité pour que cette impulsion ait une durée supérieure à θ_2 s).

La probabilité pour que la durée de l'impulsion soit au moins égale à θ_2 s est :

$$\int_{\theta_2}^{\infty} p(0, t) dt.$$

La probabilité cherchée est donc :

$$(3,12) \quad p_{a_i=+s \atop +\theta_2} = p_{a_i=+s} \times \int_{\theta_2}^{\infty} p(0, t) dt.$$

De même, on calcule la probabilité :

$$(3,13) \quad p_{a_i=-s \atop -\theta_1} = p_{a_i=-s} \times \int_0^{\theta_1} p(1, t) dt.$$

Évaluons maintenant les probabilités conditionnelles.

Deux cas sont à envisager :

a) l'axe A est situé dans une zone où le signal de commande et le signal de sortie sont, soit tous les deux positifs, soit le premier négatif et le second nul. C'est une zone telle que $Z Z'$ de la *figure 29*.

On part d'une valeur $a_i = +s$ sur l'axe A. Sur l'axe B on aura une valeur $b_j = +1$, dans les cas suivants :

— s'il n'y a pas de zéro de la fonction de commande dans l'intervalle $0, \tau - \theta_1$, c'est $p(0, \tau - \theta_1)$;

— s'il y a deux zéros de la fonction de commande dans l'intervalle $0, \tau - \theta_2$, c'est $p(2, \tau - \theta_2)$;

— s'il y a quatre zéros dans la fonction de commande dans l'intervalle $0, \tau - \theta_2$, c'est $p(4, \tau - \theta_2)$, etc.;

— mais on peut aussi avoir $b'_j = +1$, si l'on a un zéro dans l'intervalle $(\tau - \theta_2, \tau - \theta_1)$; ceci s'exprime par :

$$\partial p \frac{(1 \cdot \tau)}{d \tau} \times (\theta_2 - \theta_1).$$

La probabilité totale est donc :

$$(3,16) \quad p(0, \tau - \theta_1) + \sum_{n \text{ pair}} p(n \cdot \tau - \theta_2) + \frac{\partial p (1 \cdot \tau)}{\partial \tau} \times (\theta_2 - \theta_1);$$

b) l'axe A est situé dans une zone telle que $Z' Z''$.

On part d'une valeur $a_i = -s$, $a'_i = +1$ sur l'axe A, on cherche sur l'axe B quelle est la probabilité pour que $b'_j = +1$. Deux cas sont à envisager :

1° $\tau < \theta_1$, soit Z''' un point tel que $Z'''Z'' = \tau$ (fig. 30) si l'axe A a une abscisse comprise entre Z' et Z''' , l'ordonnée b'_j , sur l'axe B a certainement la valeur $+1$ (probabilité 1). La probabilité d'avoir $b'_j = +1$ sachant que $a_i = -s$ et $a'_i = +1$ est donc égale à la probabilité d'avoir l'axe A situé entre Z' et Z''' , c'est :

$$\frac{\theta_1 - \tau}{\theta_1};$$

2° $\tau > \theta_1$, n'aura une valeur $b'_j = +1$ sur l'axe B, sachant que $a_i = +1$ dans les cas suivants :

— s'il y a un zéro de la fonction de commande dans l'intervalle $\tau - \theta_2$:

$$p(1, \tau - \theta_2);$$

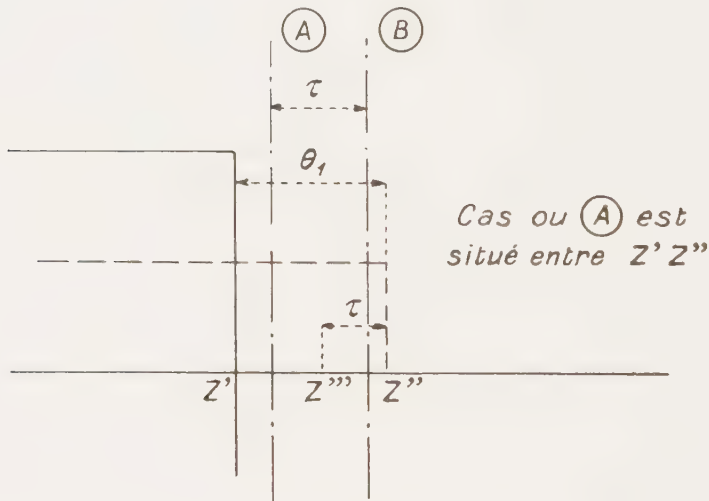


Fig. 30

— s'il y a trois zéros de la fonction de commande dans l'intervalle $\tau - \theta_2$:

$$p(3, \tau - \theta_2),$$

etc.;

— s'il y a un zéro de la fonction de commande dans l'intervalle $(\tau - \theta_2, \tau - \theta_1)$, c'est :

$$\frac{\partial p(1, \tau)}{\partial \tau} \cdot (\theta_2 - \theta_1).$$

La probabilité totale est donc :

$$(3,17) \quad \left(\frac{\theta - \tau}{\theta_1}\right)_{\tau < \theta_1} + \sum_{\text{imp}} p(n, \tau - \theta_2) + (\theta_2 - \theta_1) \frac{\partial p(1, \tau)}{\partial \tau}.$$

Les deux probabilités totales (3,16) et (3,17) sont à multiplier par les probabilités d'avoir l'hypothèse *a*) ou l'hypothèse *b*). Ces probabilités sont données respectivement par (3,12) et (3,13) :

$$p_{a_i=+s \atop +\theta_1} = p_{a_i=+s'} \int_{\theta_2}^{\infty} p(0, t) dt,$$

$$p_{a_i=-s \atop -\theta_1} = p_{a_i=-s'} \int_0^{\theta_1} p(1, t) dt.$$

La fonction d'autocorrélation du signal de sortie est donc :

$$(3,18) \quad \varphi_{ss}(\tau) = p_{a_i=s} \int_{\theta_2}^{\infty} p(0, t) dt \left[p(0, \tau - \theta_1) + \sum_{n \text{ pair}} p(n, \tau - \theta_2) + (\theta_2 - \theta_1) \frac{\partial p(1, \tau)}{\partial \tau} \right]$$

$$+ p_{a_i=-s} \int_0^{\theta_1} p(1, t) dt \left[\left(\frac{\theta_1 - \tau}{\theta_1} \right)_{\tau > \theta_1} + \sum_{n \text{ imp}} p(n, \tau - \theta_2) + (\theta_2 - \theta_1) \frac{\partial p(1, \tau)}{\partial \tau} \right].$$

REMARQUE. — L'expression ci-dessus est valable dans tous les cas, en particulier pour τ grand ou petit. Dans le cas où on ne considère que des valeurs de τ grandes, par rapport à $\frac{1}{k}$, on peut écrire directement les probabilités conditionnelles, en admettant que la probabilité d'avoir une valeur $b'_j = +1$ sachant qu'on a en $a'_i = -1$ est donnée par :

$$\sum_{n \text{ pair}} p(n, \tau) \left(1 - \frac{\theta_2 - \theta_1}{k} \right).$$

En résumé, à partir de la connaissance de la loi $p(n, \tau)$ du signal de commande et des constantes de temps moyennes d'ouverture θ_1 et de fermeture θ_2 du relais, on peut calculer la fonction d'autocorrélation du signal de sortie, donc son spectre.

Nous montrerons, au chapitre suivant, qu'il est aisé de déterminer la fonction $p(n, \tau)$ à partir d'une « épreuve » de la fonction aléatoire de commande du relais. La détermination sans l'aide de machine est inconcevable, l'emploi d'une machine à fonctions multiples, telle que celle qui est proposée au chapitre IV, rend l'opération automatique et très rapide.

3,3

RELAIS BALANCE

Nous rappelons que les relais qui entrent dans cette classe sont des relais qui travaillent pour des intensités voisines de celle du seuil. Ce sont en somme des « appareils de zéro ».

La théorie de ce type de fonctionnement est beaucoup plus difficile pour les raisons suivantes :

1° L'inertie, l'amortissement de la palette (frottements et résistance de l'air), la loi de variation du couple d'appel en fonction de la position de la palette sont autant de *facteurs principaux* pour la détermination de la fonction réponse à la fonction aléatoire stationnaire d'entrée;

2° la valeur instantanée de l'intensité n'est pas suffisante pour déterminer le mouvement de la palette;

3° le seuil d'intensité, notion physique simple, doit être complété par un seuil d'énergie (ou de puissance).

3.3.1 Forme générale de la tension de commande.

Contrairement au cas précédent envisagé, les temps pendant lesquels la fonction de commande est inférieure au seuil, mais non nulle (ou négligeable), sont au moins de l'ordre de grandeur de la constante de temps moyenne du relais. Un signal type est représenté sur la figure 31.

Au voisinage de CD, il est difficile de savoir, *a priori*, quelle sera la réponse du relais. Le problème que nous nous posons est de calculer le spectre de la fonction réponse à partir de données statistiques de la fonction de commande et des propriétés, définies ou statistiques du relais.

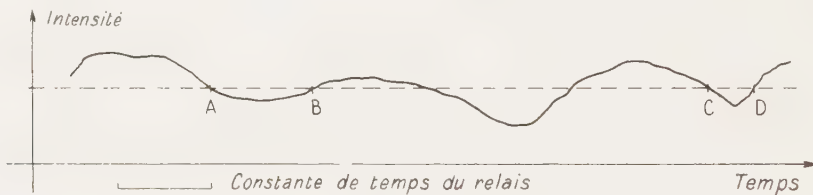


Fig. 31

3.3.2 Équations d'un relais.

Critique des relais actuels.

L'approximation conduisant à une équation du type :

$$(3.14) \quad I \frac{d^2 \theta}{dt^2} + f_1 \frac{d \theta}{dt} + K \theta = k \cdot i(t),$$

où :

I représenterait l'inertie de la palette;

f_1 le coefficient de frottement (visqueux);

K le couple de rappel;

$i(t)$ intensité résultant du signal de commande $f(t)$;

k le coefficient,

est inadmissible ici pour les raisons déjà signalées, que nous allons détailler.

En fait, seule l'inertie de la partie mobile peut être considérée comme constante, bien que souvent la palette porte-contact soit constituée par une lame flexible (solide déformable).

Le terme de frottement f_1 nous conduit à la critique suivante : l'accélération à laquelle la palette mobile est soumise croît, lorsque l'état du relais change. Ceci est

évidemment caractéristique d'un état instable. Mais, il eût été préférable de soumettre la palette à une accélération croissante ou constante sur une partie de sa course et décroissante ensuite.

Nous avons étudié, assez simplement d'ailleurs, cet effet de choc ⁽¹⁾.

Le relais considéré était un relais Bosh et Michel (24 V, 125 ω) dont les caractéristiques moyennes (premier contact, sans tenir compte du rebondissement) étaient :

— contact travail :

— retard fermeture : 20 ms (θ_2);

— retard ouverture : 1 ms (θ_1);

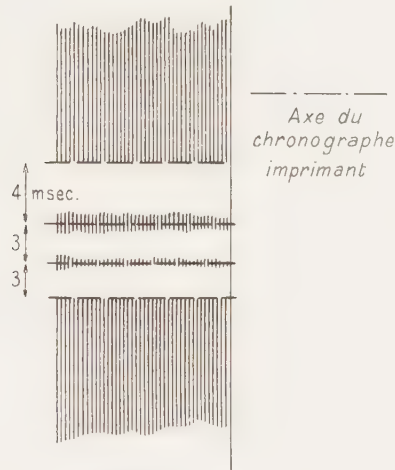


Fig. 32

— contact repos :

— retard fermeture : 5 ms;

— retard coupure : 15 ms.

(Course de la lame mobile 1 mm.)

Dans ce relais, le couple de rappel est créé par une simple lame élastique. On peut admettre sans grande erreur qu'il est constant sur toute l'amplitude de débattement de la palette (sinon, il est de la forme $a\theta + b$ ou b est grand et θ très petit). Par suite de la croissance extrêmement rapide de la force d'appel de la palette, le contact travail est en général fortement pressé et le rebondissement de la palette est assez peu probable. En fait, l'analyse au chronographe imprimant de ce relais n'a pas montré de rebondissement du contact travail à la fermeture. Par contre, la force de rappel, qui presse les contacts repos, est nécessairement faible, puisque la force d'appel de la palette, dans cette position, est elle-même faible comparée à la force d'appel de la palette dans la position « travail ». D'autre part, le système est élastique et les causes d'amortissement sont faibles. Il en résulte une tendance au rebondissement. En fait, les mesures faites sur

(1) Nous remercions les Établissements Belin qui ont bien voulu nous autoriser à faire ces mesures sur un de leur chronographe imprimant.

chronographe imprimant (1 mm correspondant à 3 ms) ont montré deux rebondissements se reproduisant d'une façon très régulière, sur la bande du chronographe où l'on avait choisi une « avance axiale » de trois traits au mm, on a obtenu l'aspect reproduit sur la *figure 32*.

Le premier rebondissement a lieu 4 ms après le premier choc et le second 3 ms après ce dernier. Les conséquences néfastes de ce rebondissement sont évidentes, tant au point de vue performances espérées qu'au point de vue vie des contacts.

Ce phénomène est difficilement évitable puisqu'il tient à la nature même du relais qui conduit à une force d'appel très variable au cours du mouvement. La compensation par un appel magnétique est employée, mais ne corrige que partiellement cet effet.

Le calcul suivant estime la variation de la force d'appel due à la variation de la réluctance du circuit magnétique.

En effet, reprenons le relais E² déjà étudié :

— soient R , R' , R'' les réluctances (*fig. 33*) des différentes branches du circuit magnétique. Nous utiliserons les indices 0 ou f suivant que la palette est éloignée ou non de la bobine.

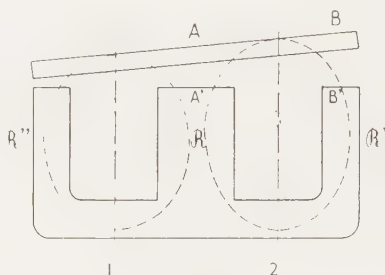


Fig. 33

La réluctance du circuit 1 est égale à la somme de la réluctance de l'entrefer (0,05 cm) et de celle de la partie métallique respectivement égale à 0,04 et 0,044, donc :

$$\mathcal{R}_{01} = 0,084 \text{ oersted.}$$

Celle du circuit 2 est égale à :

$$\mathcal{R}_{02} = 0,084 + 0,3 = 0,384.$$

Lorsque le relais est fermé, les réluctances des entrefers tombent à :

$$\mathcal{R}_{f1} = 0,0087 + 0,04 = 0,048,$$

$$\mathcal{R}_{f2} = 0,0029 + 0,04 = 0,043,$$

en admettant que, lorsque le circuit magnétique est fermé, il reste une lame d'air de 2/10 de mm en A et 1/100 en B.

Les flux en B, circuit ouvert et circuit fermé, sont :

— circuit ouvert :

$$1,25 \text{ m I} \quad 100 \quad \mathcal{R}_0 \mathcal{R}_{01}$$

d'où :

$$\mathcal{F}_0 = 1\,050 \text{ maxwells;}$$

— circuit fermé :

$$\mathcal{F}_{fB} = \frac{000}{0,003} = 9\,300 \text{ maxwells.}$$

D'où le rapport des inductions :

$$\frac{\mathcal{B}_{f0}}{\mathcal{B}_{fB}} = \frac{\mathcal{F}_{0B}}{\mathcal{F}_{fB}} = 8,8.$$

La force d'attraction croît comme le *carré* de l'induction $\left(F = \frac{B^2 s}{8 \pi}\right)$.

On voit donc que le rapport des forces d'attraction des accélérations de la lame est voisin de 90 entre le début du mouvement et la fin. Ceci explique la violence du choc au moment de la fermeture des contacts « Travail ».

Compte tenu de ces remarques, il est difficile d'assimiler le coefficient de frottement f_1 de l'équation (3,14) à une constante. Il est difficile également de le considérer comme fonction définie soit du déplacement de la palette, soit du temps. f dépend en fait de la fonction de commande qui est aléatoire.

Enfin, le second membre de l'équation (3,14) est lié à l'intensité qui passe dans la bobine, il faut tenir compte du fait que la self induction du circuit *varie énormément au cours du mouvement*. On peut considérer le coefficient d'induction L comme une fonction relativement simple de θ (déplacement).

Les deux équations régissant le relais sont alors :

$$(3,20) \quad \left\{ \begin{array}{l} I \frac{d^2 \theta}{dt} + f_1 \frac{d \theta}{dt} + k \theta = P(\theta, i), \\ f(t) = Ri + L(\theta) \frac{di}{dt}. \end{array} \right.$$

$P(\theta, i)$ est une fonction de θ et de i que l'on peut considérer comme déterminée.

Dans ces deux équations :

$f(t)$ est la fonction aléatoire de commande;

f_1 et k sont les coefficients non constants qu'il est difficile de préciser vu la rapidité des mouvements et leur faible amplitude.

L'étude plus poussée des équations (3,20) ne paraît pas devoir apporter beaucoup de lumière sur le problème posé à cause de ces incertitudes.

Par contre, par un raisonnement physique simple, qui pourrait aussi se justifier directement à partir des équations (3,20), on peut mettre en évidence une autre caractéristique d'un relais : son seuil d'énergie.

3,3.3 Seuil d'énergie d'un relais.

Pour que le relais passe de la position contact-travail ouvert à la position contact-travail fermé, il faut que l'intensité dans la bobine soit, à l'instant t , supérieure au

seuil d'intensité s — grandeur aléatoire caractérisée, par exemple, par sa loi de probabilité — et que durant le temps de transit de la palette, elle reste au moins égale à une valeur déterminée.

La puissance fournie au relais est :

$$(3,21) \quad \varepsilon = \int (I) \cdot i.$$

Le relais se fermera dans l'intervalle de temps Δt , si à aucun moment, dans cet intervalle, $\frac{d\theta}{dt}$ ne change de signe (équilibre instable).

On peut calculer alors l'énergie nécessaire pour vaincre le couple antagoniste (on néglige l'énergie due aux forces de frottement, ce qui est normal vu les faibles vitesses atteintes par la palette) :

$$(3,22) \quad \varepsilon = \int_0^{\theta_1} k(\theta) d\theta,$$

ε est le seuil d'énergie (θ_1 représente la valeur de θ correspondant au contact établi). Cette énergie doit nécessairement être fournie par la fonction d'entrée.

L'énergie fournie durant l'intervalle de temps Δt est :

$$(3,23) \quad \int_0^{\Delta t} f(t) i dt;$$

i résultant de l'équation :

$$(3,24) \quad f(t) = L(\theta) \frac{di}{dt} + Ri,$$

où $L(\theta)$ est l'expression de la self du circuit magnétique (variable). Pour résoudre cette équation, il faudrait connaître la loi du mouvement $\theta = \theta(t)$. On retombe alors sur les équations (3,20) déjà signalées. On peut cependant, moyennant une approximation, résoudre plus rapidement cette équation.

L'équilibre de la palette du relais étant instable, on ne peut imaginer un relais dans lequel la palette resterait immobilisée entre les contacts. La self du circuit, d'autre part, varie surtout lorsque la palette se déplace immédiatement au voisinage du circuit magnétique fermé. Dans le relais considéré, l'élasticité de la palette porte-contact peut permettre des variations de BB' (fig. 33) de l'ordre du dixième de millimètre.

Le relais étant ouvert, on peut prendre pour $L(\theta)$ une fonction constante L_1 correspondant à la self du circuit ouvert.

Le relais se fermera dans l'intervalle Δt si :

$$(3,25) \quad \int_0^{\Delta t} f(t) \cdot i \cdot dt \geq \varepsilon.$$

3.3.4 Étude expérimentale.

On peut imaginer le calcul, pour une fonction aléatoire $f(t)$, de la loi de répartition :

$$(3,26) \quad \text{prob} \int_0^{\Delta t} f(t) i \cdot dt \geq \alpha,$$

c'est la fonction de Δt et de α :

$$G(\Delta t, \alpha).$$

La probabilité d'avoir le relais fermé résulte donc des deux lois de probabilité suivantes :

1° $F(x)$ fonction de répartition des intensités du courant, correspondant à un signal de commande représenté par $f(t)$.

En particulier, la probabilité pour que le relais se ferme est $1 - F(s)$, où s est le seul moyen d'intensité;

2° $G(\Delta t, \alpha)$ précédemment définie.

En particulier, la probabilité d'avoir, dans l'intervalle de temps Δt , une énergie supérieure à ε , est $1 - G(\Delta t, \alpha)$.

On étudierait de même la probabilité pour que le relais, supposé fermé, s'ouvre. Si l'on se contente de la même approximation que précédemment, il faudra remplacer, dans l'équation (3,24), $L(0)$ par une fonction constante L_2 correspondant à la self du circuit magnétique fermé.

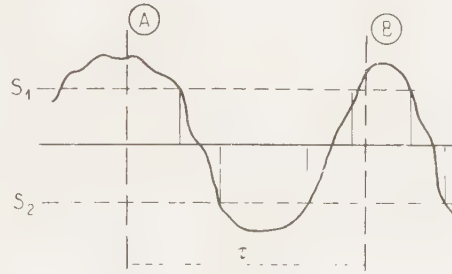


Fig. 34

3.3.5 Relais balance : solution approchée.

Cas où l'on ne tient pas explicitement compte du seuil d'énergie.

Considérons une fonction aléatoire dont une épreuve est représentée *figure 34*. Admettons que le relais étudié soit un relais à plage neutre et deux contacts D et G. Soient s_1 et s_2 , les deux seuils d'intensités moyens qui, en général, sont égaux en module. Nous cherchons $\varphi_{ss}(\tau)$, fonction d'autocorrélation de la fonction de sortie, en fonction des éléments statistiques de la fonction d'entrée.

La fonction de sortie est :

$$b'_i = \begin{cases} +1, & \text{si } f_e > s_1, \\ 0, & \text{si } s_1 < f_e < s_2, \\ -1, & \text{si } f_e < -s_2; \end{cases}$$

en désignant, comme précédemment, par a_i les ordonnées lues sur une ordonnée A et b_i celles lues sur une ordonnée B, décalée de τ secondes par rapport à A, pour la fonction d'entrée, on a vu que :

$$\varphi_{ee}(\tau) = \sum a_i b_i p_{a_i} p_{b_i} \Big|_{\tau}.$$

On peut décomposer cette somme en trois sommes partielles $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ portant respectivement sur les valeurs de a_i supérieures à s_1 , inférieures à s et comprises entre s_1 et s_2 . Dans ces conditions, on est sûr que les correspondants sont respectivement $+1 - 1$ et 0 . La fonction d'autocorrélation de la fonction de sortie qui s'écrit dans le cas général :

$$(3,27) \quad \varphi_{ss}(\tau) = \Sigma a_i b_j p_{a_i} p_{b_j} \Big|_{\tau}$$

devient :

$$(3,28) \quad \varphi_{ss}(\tau) = \Sigma_1 b'_j p_{b'_j}^{a_i > s_2} \Big|_{\tau} - \Sigma_2 b'_j p_{b_j}^{a_i < -s_2}.$$

De même, on peut préciser également les valeurs de b'_j qui ne peut valoir que $+1, 0$ ou -1 :

$$(3,29) \quad \varphi_{ss}(\tau) = \Sigma p_{b_j > s_1}^{a_i > s_1} \Big|_{\tau} - \Sigma p_{b_j < -s_1}^{a_i > s_1} \Big|_{\tau} \\ \Sigma p_{b_j > s_1}^{a_i < -s_2} \Big|_{\tau} + \Sigma p_{b_j > s_1}^{a_i < -s_2} \Big|_{\tau}.$$

3,3.6 Cas particulier important.

Supposons que la fonction aléatoire d'entrée soit « symétrique » par rapport à l'axe, c'est-à-dire que si $f(t)$ est une épreuve de cette fonction, $-f(t)$ peut aussi être une épreuve de cette fonction. Dans ces conditions, l'équation (3,29) devient :

$$(3,30) \quad \varphi_{ss}(\tau) = 2 \Sigma p_{b_j > s}^{a_i > s_1} \Big|_{\tau} - 2 \Sigma p_{b_j < -s}^{a_i > s_1} \Big|_{\tau};$$

s seuil commun (en module).

Ces deux probabilités sont faciles à déterminer. Elles sont, en effet, liées aux probabilités $p(n, \tau)$ d'avoir n zéros dans l'intervalle τ pour la courbe :

$$(3,31) \quad F(t) = f(t) - s,$$

où s est le module du seuil commun ;

$$\Sigma p_{b_j > s}^{a_i > s_1} \Big|_{\tau} = \sum_{n \text{ pair}} p_F(n, \tau) \text{ [relatif à la fonction } F(t)],$$

de même en vertu de la symétrie :

$$\Sigma p_{b_j < -s}^{a_i < -s_2} \Big|_{\tau} = \sum_{n \text{ imp}} p_F(n, \tau).$$

Alors :

$$(3,32) \quad \varphi_{ss}(\tau) = 2 \sum_{\text{pair}} p_F(n, \tau) - 2 \sum_{\text{imp}} p_F(n, \tau).$$

Nous donnerons, au chapitre IV, au cours de la description d'un appareil général permettant de calculer automatiquement les principales propriétés statistiques d'une fonction aléatoire à partir d'une épreuve, le mode d'utilisation de cette machine pour le calcul des probabilités conditionnelles qui entrent dans l'équation (3,30).

On notera que les fonctions $p(n, \tau)$ apparaissent dans les deux cas envisagés : relais de signe, relais de balance. Leur calcul est donc de première utilité.

REMARQUE. — Bien que dans le relais-balance, tel que nous l'avons défini, les variations de la fonction de commande sont, en général, moins rapides que dans le cas du relais de signe, on peut introduire des retards θ_1 et θ_2 à l'ouverture et à la fermeture.

Les calculs, dans le cas du relais-balance, doivent être conduits comme ci-dessus, mais modifiés dans le détail afin de tenir compte des résultats obtenus pour le relais de signe. Le calcul complet, bien que non compliqué théoriquement, devient, par contre, très long en écritures.

3,3.7 Résultats expérimentaux.

En fait, les intervalles de temps dans lesquels le relais est susceptible de se fermer, lorsque les conditions d'excitations sont différentes, sont assez resserrées. L'objet du paragraphe suivant est d'exposer les différentes mesures que nous avons faites concernant les constantes de temps de relais.

3,4

CONSTANTES DE TEMPS DE RELAIS

Le but de ce paragraphe est d'étudier les dispersions des *constantes de temps* de relais. Nous avons étudié les deux problèmes suivants :

1^o étude d'un lot de relais excités tous identiquement, la dispersion constatée est due à la fois aux très légères variations de fabrication, et *au passé* de chacun des relais qui diffère d'un relais à l'autre;

2^o étude d'un relais excité de nombreuses fois d'une manière répétitive et ce pour quelques séries de conditions d'excitation différentes.

3,4.1 Étude d'un lot de cent relais soumis à la même excitation.

a) PRINCIPE DE LA MESURE.

Considérons un lot de cent relais tous connectés à la même source.

Supposons que nous étudions *le retard* à la fermeture du contact *travail*. La palette est normalement (au repos) sur la butée P (c'est, en fait, un contact) (*fig. 28*).

On mesure le temps qui s'écoule entre l'instant où l'on applique la tension sur B et le moment où la palette A vient en contact avec Q. Ce temps était de l'ordre de 10 ms pour le relais étudié. Les procédés mécaniques pour la mesure de ces temps sont difficiles à mettre en œuvre.

Les cent relais vont se fermer en des temps échelonnés entre t_1 et t_2 . Nous cherchons la probabilité pour qu'un relais soit fermé entre l'instant t et l'instant $t + dt$, t étant compris entre t_1 et t_2 .

Si nous admettons que cent est un nombre d'épreuves suffisamment grand ⁽¹⁾, nous pouvons assimiler cette probabilité au nombre de relais qui se ferment dans l'intervalle dt , à l'instant t . Nous faisons cette hypothèse. Le problème revient à compter le nombre de relais qui se ferment entre t et $t + dt$.

Pour ce faire, nous avons déchargé une petite capacité connectée à la palette de chaque relais, dans une résistance.

En additionnant les cent impulsions de décharge des condensateurs sur une résistance commune, on obtient à chaque instant t , dans l'intervalle dt , une impulsion résultante qui est la somme de toutes les impulsions créées dans l'intervalle dt . En utilisant un oscillographe à *remanence* assez longue, on peut espérer photographier *directement* la loi de probabilité cherchée.

b) DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL ⁽²⁾.

La première précaution prise fut de respecter une symétrie parfaite dans le montage des cent relais et de limiter les éventuelles inductions parasites au minimum. Nous avons adopté une disposition circulaire, la résistance de sommation étant au centre (*fig. 35*).

Caractéristiques électriques.

Nous avons recherché au début des formes d'impulsions aussi étroites et symétriques que possible. Au cours d'un essai intermédiaire, nous nous sommes aperçus qu'il était inutile de rechercher l'étroitesse et la symétrie de ces impulsions de décharge.

Par contre, il a fallu choisir la résistance de décharge de telle façon que la résistance de contact du relais soit négligeable, par rapport à la résistance de contact, variable d'un relais à l'autre et perturbatrice.

D'autre part, il ne faut pas que la tension aux bornes de la résistance sommatrice dépasse quelques volts, sinon les condensateurs qui se déchargeraient au voisinage des intervalles de temps où de nombreux relais se ferment, ne pourraient plus être considérés comme chargés à 360 V.

Des mesures de résistance de contact ont montré que celle-ci restait toujours inférieure à $0,5 \Omega$. Nous avons initialement choisi une résistance de l'ordre de 50Ω pour être sûrs que les variations de la résistance de contact restent *toujours* négligeables vis-à-vis de la résistance de décharge. Par la suite, nous avons changé cette résistance; elle a été portée à $2\,000 \Omega$. La résistance de sommation choisie *a priori*, égale à $0,1 \Omega$, s'est révélée correcte. La tension à ses bornes était envoyée sur l'oscillographe.

La charge des condensateurs s'effectue à partir d'une tension stabilisée $+ 360 \text{ V}$ à travers une résistance de $100\,000 \Omega$.

(1) Le but de ce travail est la recherche de méthodes ou l'étude de certaines propriétés. Une étude technique et systématique n'est pas du ressort de ce travail. Elle est, par contre, suggérée par ce dernier.

(2) Nous remercions M. le Directeur du S.T.Aé, qui nous a autorisé à faire réaliser le montage expérimental, dans les ateliers du S.T.Aé et les mesures dans les laboratoires des Établissements J. Turek.

Choix des capacités.

Nous nous sommes fixés une précision de 5 % ou mieux. Les capacités ($0,1 \mu f$) du commerce ne sont qu'à 20 % près, sauf commande spéciale. Pour éviter une dépense importante concernant ces capacités, nous nous sommes adressés à un fabricant (Safco-Trévoux) et lui avons demandé de fournir cent cinquante capacités sortant de la même machine, celle-ci étant alimentée par un même rouleau de papier isolant et une même feuille d'aluminium. Le contrôle de cinquante capacités prises au hasard a montré une dispersion maximum de 3 %.

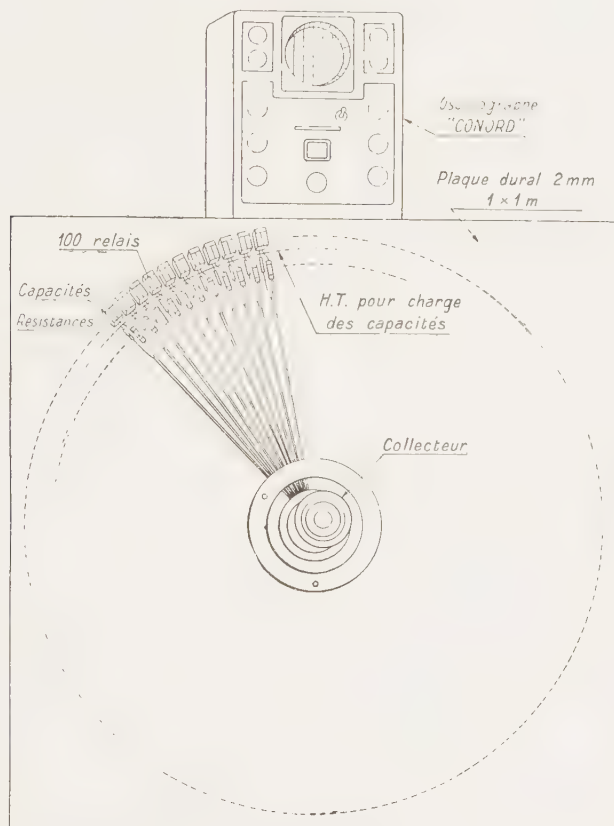


Fig. 35. — Mesure de la dispersion des constantes de temps d'un lot de cent relais
(D'après une photographie du matériel)

Réalisation.

Les cent relais ont été montés sur une plaque de tôle de duralumin de 100×100 cm (fig. 35). Les inductions parasites sont absolument négligeables (nous avons vérifié que si l'on déconnecte un relais de l'ensemble, la fermeture à la main — de ce relais, pour provoquer une seule décharge, ne provoquait aucun courant induit décelable par l'appareillage utilisé, sur tous les autres relais); la résistance de $0,1 \omega$ (fig. 36) est soigneusement isolée de toute induction parasite, comme le montre le croquis du « collecteur » (fig. 37). L'oscillographe utilisé était un A.C. Connor Ltd (2 faisceaux) à déclenchement automatique du balayage.

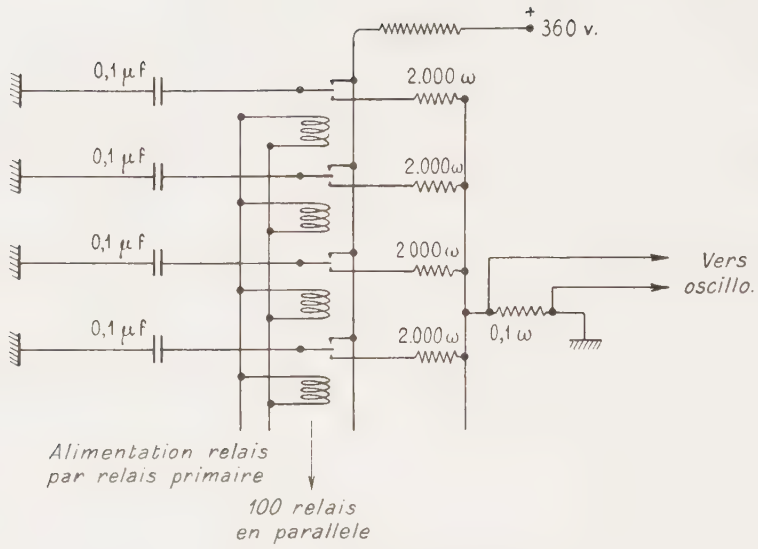


Fig. 36. — Schéma de câblage

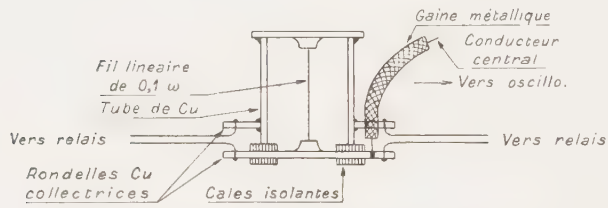


Fig. 37. — Réalisation du blindage de la résistance de 0,1 Ω

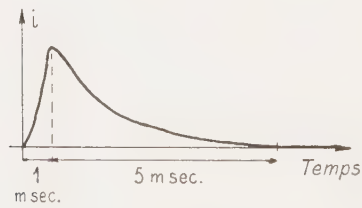


Fig. 38

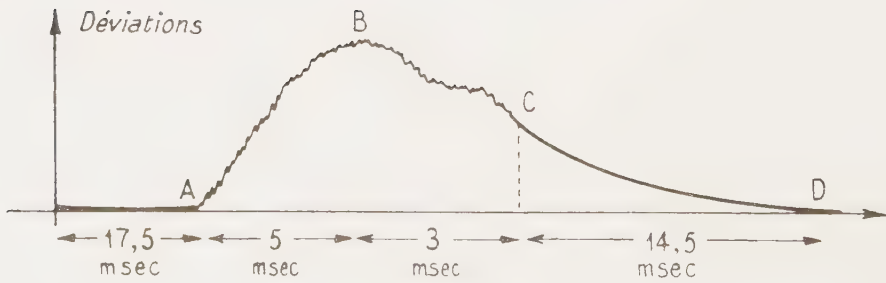


Fig. 39

Premiers résultats.

Comme il a été dit au cours de la mise au point, nous avons tenté une mesure après avoir obtenu, comme courbe de décharge d'un condensateur, une courbe dont l'aspect relevé sur l'oscillographe était celui de la *figure 38*.

La courbe relevée sur l'oscillographe, pour les cent relais, se présentait alors comme sur la *figure 39*.

Le fait que la courbe devient « lisse », après le point C, indique qu'après le temps correspondant à C plus aucun relais ne se ferme : la courbe CD correspond aux courants résiduels de décharge des condensateurs. La loi ainsi observée était assez déformée par suite de la non symétrie et de l'étendue (dans le temps : 4 ms) de la courbe de décharge de chacune des capacités.

Mais nous allons montrer que la connaissance des deux courbes précédentes suffit pour pouvoir en déduire la loi de probabilité telle que nous l'avons définie au paragraphe a). Auparavant, précisons que la forme de cette courbe a toujours été la même comme le montrent les photographies du tube cathodique prises lors de différents essais.

c) EXPLOITATION DE LA COURBE EXPÉRIMENTALE.

Soit :

$$(3,33) \quad y = h(t) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}},$$

l'équation de la décharge d'un condensateur, décharge provoquée à $t = 0$, l'équation d'une décharge provoquée à l'instant τ_i est :

$$(3,34) \quad y = h(t - \tau_i).$$

La courbe expérimentale photographiée correspond à :

$$(3,35) \quad g(t) = \sum_0^{\infty} h(t - \tau_i),$$

soit $f(t)$ la fonction de probabilité des instants de fermeture des relais.

$f(\tau) d\tau$ = probabilité pour qu'un relais se ferme entre τ et $\tau + d\tau$

$$= \frac{\text{Nombre de relais fermés entre } \tau \text{ et } \tau + d\tau}{\text{Nombre total de relais } N}.$$

[Hypothèse du § a).]

Supposons que la fermeture d'un relais corresponde à une fonction rectangulaire, de base $d\tau$ et d'amplitude $\frac{1}{d\tau}$.

Si n_τ relais se sont fermés entre τ et $\tau + d\tau$, l'amplitude de la fonction rectangulaire attachée à cet intervalle de temps sera n_τ et l'on aura :

$$(3,36) \quad f(\tau) d\tau = \frac{n_\tau}{N}.$$

Si l'on suppose le nombre des relais très grand, de telle façon qu'en un intervalle $d\tau$ (situé entre deux limites τ_1 et τ_2) on ait, en général, plusieurs relais fermés, on pourra supposer que les fonctions rectangulaires tendent à la limite vers des fonctions de Dirac.

Dans l'intervalle $(\tau, \tau + d\tau)$, n_τ relais ne sont fermés :

— la fonction que l'on cherche à déterminer (à partir de la courbe expérimentale photographiée) est :

$$f(\tau) d\tau = \frac{n_\tau}{N}$$

— la fonction expérimentale photographiée est :

$$g(t) = \sum_0^i h(t - \tau_i)$$

mais dans l'intervalle $(\tau, \tau + d\tau)$, n_τ relais se sont fermés donc, approximativement leur contribution dans l'avenir sera :

$$h(t - \tau) f(\tau); \quad t - \tau \geq 0.$$

En sommant toutes ces contributions pour chacun des intervalles où au moins un relais s'est fermé, on obtient :

$$(3,37) \quad g(t) = \int_0^\infty h(t - \tau) f(\tau) d\tau,$$

ou en posant $t - \tau = \sigma$:

$$(3,38) \quad g(t) = \int_0^\infty h(\sigma) f(t - \sigma) d\sigma.$$

La fonction caractéristique ⁽¹⁾ correspondant à la loi de probabilité expérimentale $g(t)$, c'est-à-dire la transformée de Fourier de la fonction $g(t)$, est :

$$(3,39) \quad G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} dt \int_0^\infty h(\sigma) f(t - \sigma) d\sigma,$$

(1) On rappelle que la fonction caractéristique est une fonction liée à la fonction de répartition $F(x)$ d'une fonction aléatoire par la relation :

$$\Phi(u) = e^{i\overline{ux}} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} dF(x).$$

Cette fonction est toujours continue (alors que la fonction de répartition peut avoir des discontinuités).

Une propriété intéressante des fonctions caractéristiques, hors la continuité, réside dans le fait que les termes successifs de leur développement suivant les puissances entières de u représentent, au moins formellement, les « moments » de la variable aléatoire x :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1(x) = E(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx = \text{constante}, \\ \mathcal{M}_2(x) = E(x^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx = \text{constante}, \end{aligned}$$

$E(x)$ signifie espérance mathématique de x ; $p(x)$ est la loi de probabilité de la variable x , c'est aussi la dérivée de la fonction de répartition prise pour la valeur de x :

$$p(x) = \left(\frac{dF(X)}{dX} \right)_{X=x},$$

tout au moins pour tous les points où $F(x)$ est continu :

$$\Phi(u) = e^{i\overline{ux}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iu)^k}{k!} \mathcal{M}_k.$$

qu'on peut écrire :

$$(3,40) \quad G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} dt \int_{-\infty}^{+\infty} h(\sigma) f(t - \sigma) d\sigma;$$

puisque :

$$h(\sigma) = 0 \quad \text{si} \quad \sigma < 0,$$

en séparant les variables :

$$(3,41) \quad G(\omega) = H(\omega) \cdot F(\omega);$$

$F(\omega)$ étant une véritable fonction caractéristique, c'est celle correspondant à la fonction de répartition des instants de fermeture (suite aléatoire τ_i).

D'autre part, $H(\omega)$, transformée de Fourier de $y = h(u)$, est simplement la fonction de transfert du système capacité résistance :

$$h(t) = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}, \quad h(t) = 0 \quad \text{si} \quad t < 0,$$

c'est :

$$\frac{V_0 C}{RC j\omega + 1}.$$

D'où la méthode :

1° photographier sur l'oscillographe la courbe $g(t)$;

2° calculer la transformée de Fourier $G(\omega)$;

3° déduire $F(\omega)$ par la relation (3,41);

4° de cette fonction caractéristique passer à la loi de probabilité des instants de fermeture.

d) REMARQUES.

1° L'observation de la courbe expérimentale $g(t)$ montre, ainsi qu'on l'a signalé au paragraphe a), une partie lisse après un certain instant c' . La courbe théorique $f(t)$, déduite de $g(t)$, doit s'annuler à partir de ce même instant, puisque la probabilité pour qu'un relais se ferme après cet instant est nulle (tous les relais étant déjà fermés);

2° cette méthode peut être utilisée pour la recherche d'une loi de probabilité d'une suite aléatoire du type de celle envisagée ici, lorsqu'il n'est pas possible d'attacher physiquement, à chaque individu de la suite, un signe conventionnel simple tel qu'une impulsion rectangulaire.

e) RÉSULTATS NUMÉRIQUES.

Les courbes de la *figure 40* représentent les courbes $g(t)$, calquées sur une photographie de l'oscilloscope, $h(t)$, également calquée, et $f(t)$, résultat cherché.

La méthode utilisée pour obtenir cette courbe, méthode suggérée par M. KUNTZMAN, a consisté à résoudre directement l'équation intégrale (3,37) ou (3,38) par une méthode d'approximations; cette méthode relativement longue s'est avérée cependant

plus rapide que celle indiquée ci-dessus, lorsque les transformées de Fourier doivent être calculées à la main (où même à l'aide des machines à cartes perforées). La méthode indiquée au paragraphe c) n'est, en effet, valable que si une machine permet d'exécuter ces transformations, ce qui n'a pas été le cas jusqu'ici. L'équation (3,37) a été résolue en cent pas couvrant 24 ms. Les calculs ont été faits avec une machine de bureau (Monroe). (Cette méthode nécessite la connaissance de la fonction $h(u)$, ce qui n'a pas présenté de difficultés ici, cette fonction ayant été photographiée pendant les mesures.)

3,4.2 Étude répétitive d'un relais.

Il s'agit d'étudier la suite aléatoire des temps de fermeture d'un seul relais soumis à un grand nombre d'excitations identiques.

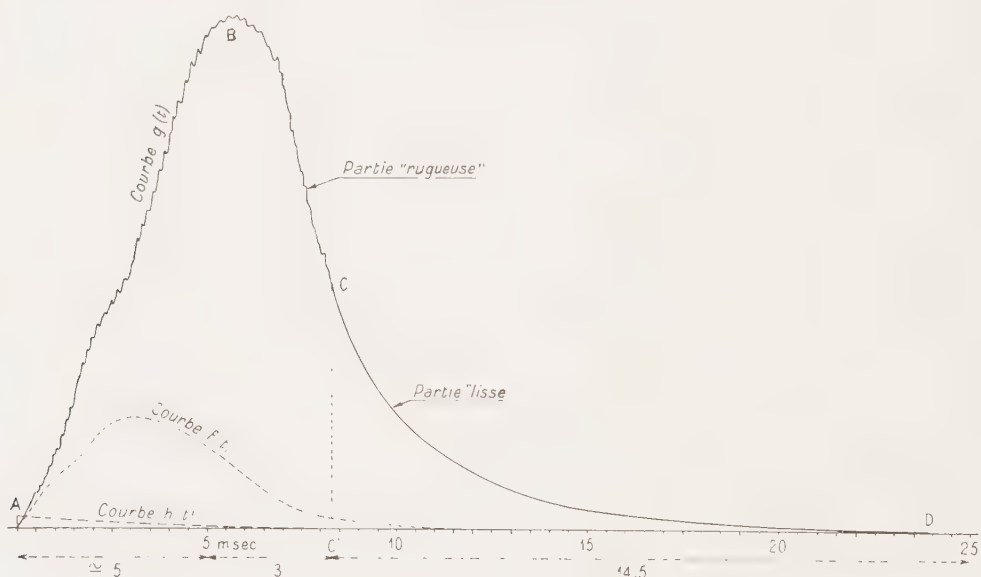


Fig. 10. — Loi de probabilité des instants de fermeture de relais déduite d'une photographie d'un tube cathodique

Un appareil, décrit au chapitre suivant, permet de classer automatiquement les nombres de cette suite suivant leur valeur; on obtient alors directement la loi de probabilité de la suite considérée, si l'on effectue un nombre d'essais suffisamment grand pour pouvoir assimiler les fréquences aux probabilités.

Nous avons cependant fait une première série de mesures sans attendre la terminaison de la machine; elle met en évidence l'intérêt d'effectuer systématiquement des mesures sur différents relais et la nécessité de modifier les relais afin de les rendre moins sensibles aux accélérations.

a) BUT DES MESURES.

En plus de l'établissement de la loi de probabilité des instants de fermeture d'un relais, nous avons déterminé une suite de temps de fermeture, lorsque le relais était placé sur une table oscillante (fig. 41); les instants de déclenchement du relais

étaient indépendants de la vibration de la table. La direction du vecteur accélération était parallèle au vecteur « course des contacts » (effet d'accélération maximum). Mille mesures ont été effectuées se répartissant par tranches de cent, alternativement « au repos » (table oscillante arrêtée) et « en mouvement » (table de mouvement).

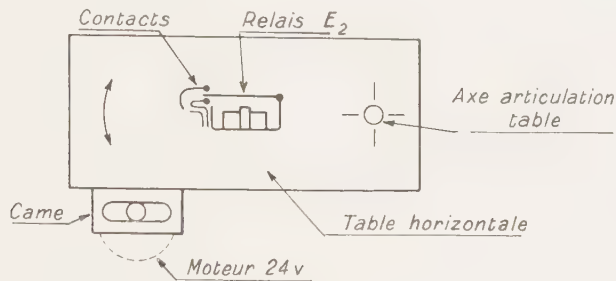


Fig. 41. — Table vibrante

Le mouvement de la table était sinusoïdal, fréquence 45 Hz; amplitude du mouvement de la table à l'endroit des contacts : 2 mm. Dans ces conditions, l'accélération, au droit des contacts, variait sinusoïdalement entre 0 et 1,6 g.

b) DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL (1).

On a utilisé un compteur électronique à quatre décades permettant de compter les centièmes de millisecondes (fig. 42). La mise en tension du relais déclenchait le comptage qui était arrêté par la fermeture du relais. L'état du compteur était lu à vue et noté; remise à zéro également manuelle; c'est la non automaticité de ces opérations qui a limité à mille le nombre de « coups » exécutés.

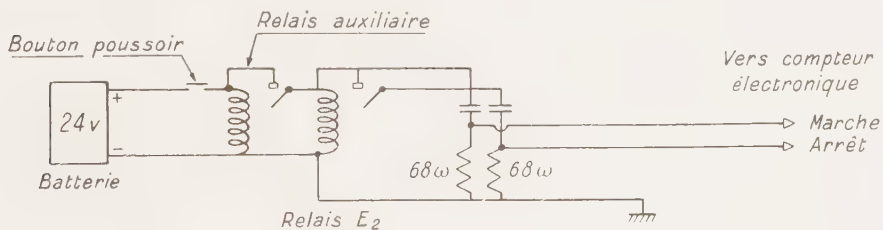


Fig. 42. — Schéma électrique

Les premiers essais ont montré la nécessité de remplacer le contact manuel de déclenchement du relais E_2 par un relais primaire; les dispersions qu'on obtenait étaient disproportionnées par rapport à celles obtenues dans l'essai des cent relais. Ce fait, assez inattendu, montre que le relais est sensible non pas seulement à la valeur instantanée de l'intensité, mais aussi au passé récent de cette intensité.

(1) Mesures faites au laboratoire des Établissements J. Turck, grâce à l'autorisation de M. DECKER, Chef de la Section Engins spéciaux du S.T.Aé.

Les figures 41 et 42 représentent le schéma électrique et le croquis de la table vibrante qui a été construite pour ces mesures.

c) RÉSULTATS.

Les graphiques de la figure 43 résument les résultats.

En abscisse ont été portés les temps de millisecondes, les ordonnées sont proportionnelles aux nombres de fois où le relais s'est fermé après le temps indiqué en abscisse (1 mm par coup).

La courbe 1 correspond au relais au repos excité cinq cents fois.

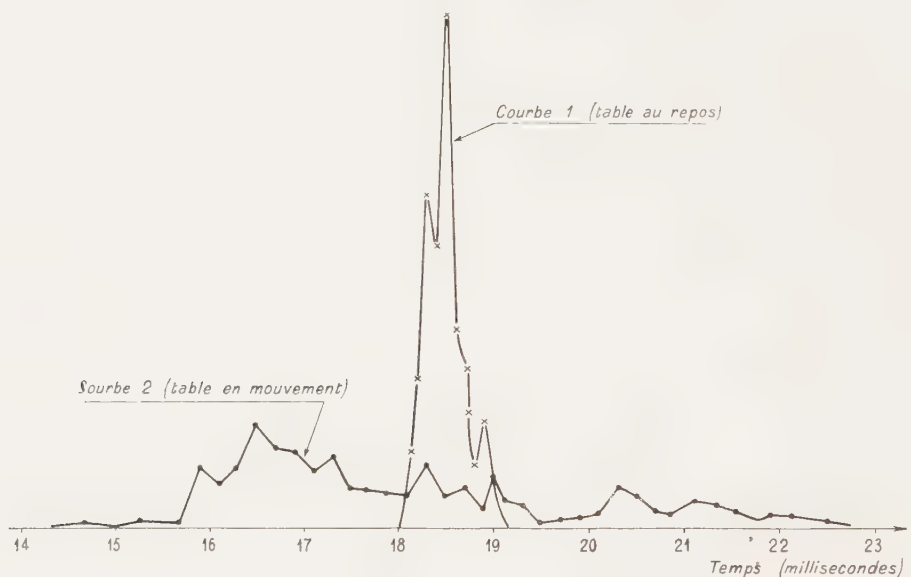


Fig. 43. — Lois de probabilité des instants de fermeture d'un relais

La courbe 2 correspond au relais sur la table vibrante, excité cinq cents fois, également au hasard.

Les deux courbes ne sont pas retouchées.

On en déduit immédiatement les résultats suivants :

— lorsque le support du relais vibre, ce qui est, en général, le cas pour les pilotes automatiques, la dispersion des instants de fermeture devient considérable. Pour le relais étudié, la constante de temps moyenne, relais au repos, était de l'ordre de 18,4 ms (valeurs extrêmes : 18,0 — 19,1 ms). Le même relais soumis à des vibrations relativement peu importantes (accélération max 1,6 g), du même ordre de grandeur que celles que l'on peut rencontrer sur un avion, a une constante de temps moyenne voisine de 17,1 ms et une dispersion beaucoup plus grande (valeur extrême : 14,6 — 22,8 ms).

Nous n'avons pas calculé, à l'issue de ces premiers essais, la dispersion σ , le nombre d'épreuves étant trop faible. De même, une étude portant sur plusieurs milliers d'épreuves permettrait de tirer des conclusions quant aux « pointes » que l'on constate sur les graphiques joints. Ces pointes peuvent provenir de fréquences propres de la partie mobile

du relais. De toute façon, la courbe 2 montre combien il est imprudent de compter sur une constante de temps fixe et bien déterminée, lorsque le relais doit être monté sur un bâti susceptible de vibrer; si la courbe représente effectivement la loi de probabilité, on voit que la probabilité d'obtenir une constante de temps située entre 16,5 et 16,6 ms (probabilité maximum) est de 5,5 %, celle d'obtenir une constante de temps située entre 15,8 et 15,9 ms est *égale* à celle d'obtenir une constante de temps située entre 23 et 24 ms (probabilité commune : 2 %). Le comportement du système pour ces deux constantes de temps peut être foncièrement différent.

En conclusion, il est d'abord nécessaire de disposer le relais de telle façon qu'il soit le moins sujet aux accélérations de vibrations.

Un équilibrage dynamique du relais éviterait, de toute façon, ces ennuis. Par contre, il conduirait probablement à augmenter légèrement l'inertie de la partie mobile du relais, donc la constante de temps moyenne du relais.

PROCÉDÉS ET MOYENS DE CALCUL REMARQUES SUR LES SYSTÈMES NON LINÉAIRES

1.1 SYSTÈMES LINÉAIRES ET SYSTÈMES NON LINÉAIRES

4.1.1 Systèmes linéaires.

On a vu, au chapitre II, que la détermination de la fonction de transfert d'un système linéaire ne faisait appel qu'aux fonctions de corrélation. L'appareil de base est l'autocorrélateur. Nous reviendrons sur cet appareil au paragraphe 4.3.2.

4.1.2 Différentes sortes de non-linéarité.

Nous avons étudié en détail le cas du relais. C'est un système non linéaire particulier qui conduit aux remarques suivantes :

a) la relation (3,18) lie la fonction d'autocorrélation, donc le spectre énergétique, qui en est la transformée de Fourier, aux propriétés statistiques concernant les *zéros* de la fonction de commande, c'est-à-dire à une fonction qui n'a pas la dimension d'une énergie et n'est pas directement liée à elle. Le relais contrôle une source d'énergie externe, la simplicité de l'étude précédente réside dans le fait que ce contrôle s'effectue sur deux ou trois valeurs possibles;

b) l'étude expérimentale de la constante de temps d'un relais et le calcul permettant l'interprétation des courbes expérimentales montrent qu'un appareil, relativement simple mécaniquement et électriquement, possède des caractéristiques très dispersées pour des causes excitatrices identiques. Comme nous l'avons signalé, l'utilisation d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants n'est qu'une approximation;

c) la notion de fonction de transfert, telle qu'elle a été définie au chapitre premier, n'est pas applicable aux relais et aux systèmes non linéaires, puisqu'on l'a déduite d'une transformation de Laplace portant sur une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Par contre, la relation (3,18) peut être considérée comme une équation fonctionnelle entre l'amont et l'aval d'un circuit non linéaire. Mais il est fondamental de remarquer que la recherche du spectre de la fonction de sortie d'un tel circuit ne dépend plus uniquement du spectre de la fonction d'entrée (et bien entendu des caractéristiques du circuit), mais d'une donnée plus précise concernant cette fonction d'entrée : à savoir la loi à deux variables $p(n, \tau)$. On peut déduire, à partir de cette loi, la fonction d'autocorrélation de la fonction d'entrée, mais la réciproque n'est pas vraie : de la fonction

d'autocorrélation on ne peut déduire la loi $p(n, \tau)$. C'est en ce sens que la connaissance de $p(n, \tau)$ est plus précise que celle de la fonction d'autocorrélation pour une même fonction aléatoire.

Il faut donc s'attendre, pour l'étude des systèmes non linéaires, à trouver des relations telle que celle de l'équation (3,18). Les fonctions statistiques, liées à la fonction d'entrée, qui figureront dans l'expression de la fonction d'autocorrélation ou du spectre de la fonction de sortie, seront d'autant plus précises que la non linéarité sera accusée ou difficile à définir.

Le type de non-linéarité le plus fréquent est la « saturation » d'amplitude. Jusqu'au chapitre II nous avons considéré des systèmes linéaires pour lesquels l'amplitude de la fonction d'entrée n'a jamais été précisée. Les diagrammes, notamment le diagramme amplitude-fréquence indiquant le *rapport* des amplitudes sortie/entrée, étaient tracés pour une amplitude correspondant au domaine linéaire. (Le fait que ce rapport amplitude-fréquence tend vers 0 aux fréquences élevées est conforme à la théorie des systèmes linéaires.)

L'étude des systèmes non linéaires, même en régime harmonique, est loin d'être satisfaisante. Il n'existe pas de méthode analytique ou synthétique suffisamment commode pour être systématiquement utilisée. En général, on utilise plusieurs critères ou solutions graphiques. Il est cependant nécessaire, en premier lieu, de déterminer les zones linéaires et non linéaires d'un système. Ensuite, conformément à l'esprit de ce travail, il faut rechercher si, pour la fonction aléatoire d'entrée à laquelle le système devra obéir, le point figuratif du système restera situé dans la zone linéaire ou non. Il peut être utile de procéder comme suit.

4.1.3 Diagramme de linéarité du système.

On porte sur un graphique (*fig. 44*), en abscisses les amplitudes de la fonction d'entrée supposée sinusoïdale, en ordonnées les amplitudes maxima de la réponse du système ou de l'élément considéré. On peut tracer expérimentalement une famille de courbes caractéristiques. Elles ont, en général, l'allure de la famille représentée ci-après pour les raisons suivantes :

— négligeons d'abord les seuils; tant que le système est linéaire, le point représentatif, pour chaque fréquence, se déplace sur une droite dont la pente est proportionnelle au gain du système pour la fréquence considérée.

Cette famille de droites se déduit directement de la courbe gain-fréquence du système linéaire. Les courbes sont graduées en ω , on suppose $\omega_0 < \omega_1 < \omega_2, \dots$, le graphique (*fig. 45*) représente un système dont la courbe gain-fréquence aurait l'allure ci-dessous :

— pour une fréquence, au delà d'une certaine amplitude d'entrée, des saturations apparaissent et la courbe s'infléchit vers le bas. S'il y a des butées mécaniques (ou équivalentes), la caractéristique présente un palier horizontal. Il est même possible que la caractéristique ait une pente négative pour les grandes amplitudes de θ_e ;

— l'existence de seuils revient à décaler la famille de courbes vers la droite; si le seuil est indépendant de la fréquence, ce décalage est une translation parallèle à l'axe des abscisses et d'amplitude égale au seuil;

— le domaine de linéarité est défini par l'intérieur du contour où les caractéristiques sont rectilignes.

Il s'agit de savoir si, pour une entrée représentée par une fonction aléatoire, le point figuratif du système reste ou non dans cette zone.

L'organe de puissance est, en général, celui qui a la bande passante la plus étroite. Par contre, l'étage amplificateur se termine, en général, par un organe dont la bande passante est supérieure à celle de l'organe de puissance, mais dont la puissance qu'il est

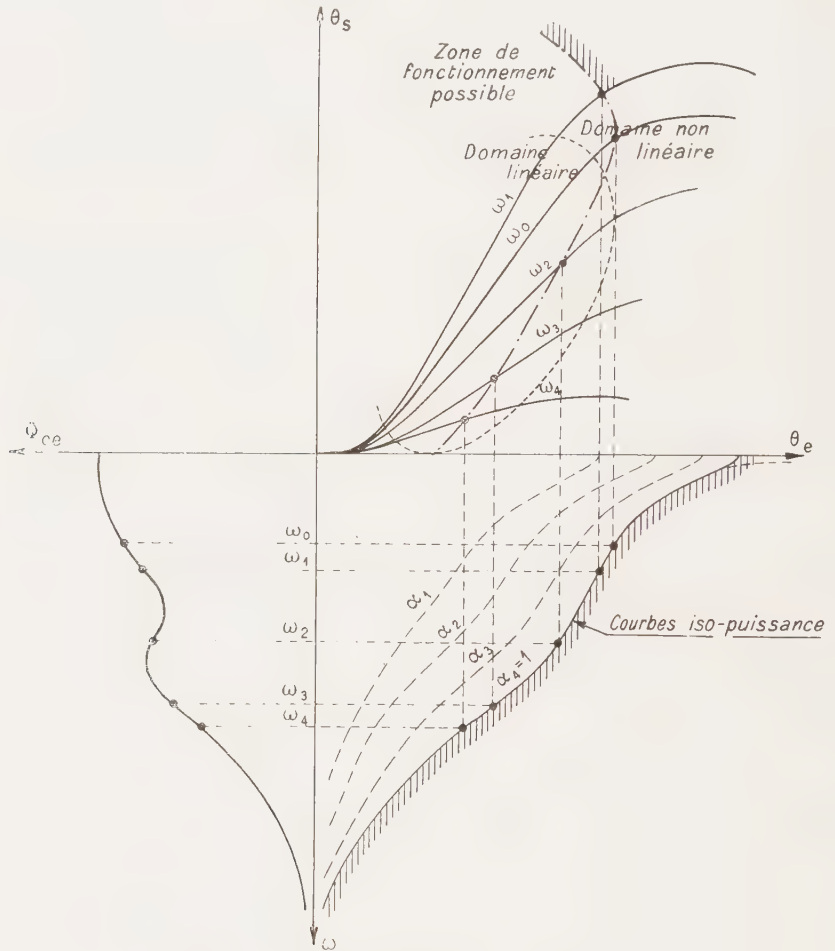


Fig. 44. — Diagramme de linéarité

susceptible de fournir est limitée, soit par ses caractéristiques physiques propres, soit par les caractéristiques de l'étage pré-amplificateur. Par exemple, considérons un système constitué par un étage pré-amplificateur électronique, suivi d'un petit moteur à excitation séparée, agissant sur la commande d'un distributeur de vérin hydraulique. (On suppose que le retour d'asservissement s'effectue entre la sortie du vérin et le distributeur.)

Le moteur de commande du distributeur, étant de faible puissance, peut être largement calculé. L'ensemble pré-amplificateur-amplificateur peut être considéré comme linéaire dans la bande fréquence considérée, alors que l'étage de puissance ne le sera pas.

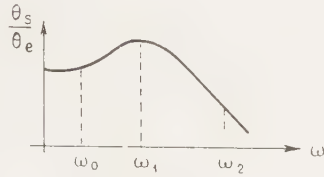


Fig. 15

L'équation différentielle régissant le mouvement du distributeur peut être représenté, avec une bonne approximation, par :

$$(4,1) \quad I \theta'' + f \theta' + k \theta = C,$$

où I , f et k sont les paramètres d'inertie, de frottement et de rappel du système : moteur + distributeur, et C le couple moteur proportionnel au signal dans le type de moteur considéré.

Pour ce type de moteur, les courbes caractéristiques, on le rappelle, sont celles représentées *figure 46*.

La puissance P_e fournie par le moteur est $C \theta'$, donc d'après (4,1) :

$$(4,2) \quad I \theta'' \theta' + f \theta'^2 + k \theta \theta' = C \theta' = P.$$

Si la fonction d'entrée du système était telle que la vitesse du moteur fluctue entre 0 et la vitesse maximum, on pourrait définir une puissance moyenne P fournie par le système. Soit $C = C_0 \sin \omega t$ le couple moteur; le système étant linéaire, la sortie du moteur est de la forme :

$$\theta = A \sin (\omega t + \varphi)$$

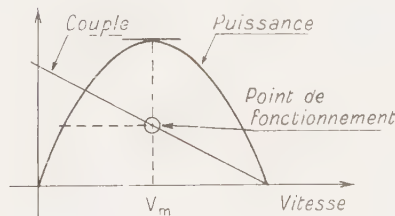


Fig. 46

et, dans le cas où la puissance moyenne P fournie par le moteur est constante, l'équation (4,2) donne :

$$(4,3) \quad - I A^2 \omega^3 + f A^2 \omega^2 = P \sqrt{2}.$$

D'une manière plus précise on peut, pour chaque excitation sinusoïdale, définir la puissance maximum que le moteur est susceptible de fournir. En effet, d'après les

courbes caractéristiques du moteur, on peut déduire la puissance moyenne maximum susceptible d'être fournie en oscillation sinusoïdale par le moteur. La courbe $P(\nu)$ devient une fonction de temps $P(t)$ que l'on intègre pendant une période : la valeur de cette intégrale représente une fonction de la pulsation :

$$\Pi(\omega).$$

L'équation (4,3) devient alors, dans ce cas :

$$(4,4) \quad -I A^2 \omega^3 + f A^2 \omega^2 = \Pi(\omega),$$

où $\Pi(\omega)$ est une fonction connue de ω .

On a tracé sur le diagramme θ_e, θ_s , un diagramme θ_e, ω . A cause de la limitation de puissance, on est sûr que, dans ce plan, le point figuratif ne pourra sortir du domaine non hachuré. La frontière de ce domaine est précisément représentée par l'équation implicite (4,3) ou (4,4) dans laquelle A représente P_e .

Ce domaine peut toujours être expérimentalement déterminé. Il montre qu'à une fréquence ω_i donnée, l'amplitude maximum susceptible d'apparaître est θ_{e_i} ; à ces deux nombres correspond sur le diagramme θ_e, θ_s un point situé dans le domaine linéaire ou non.

On peut d'ailleurs tracer dans ce plan la famille des courbes iso-puissance. Cette famille est représentée par l'équation (4,3) ou (4,4) dans laquelle P doit être représenté par αP ou $H(\omega)$ par $\alpha H(\omega)$, α étant un paramètre ⁽¹⁾.

Considérons enfin la fonction aléatoire d'entrée et représentons son spectre sur les deux axes $\omega, \Phi_{ee}(\omega)$ portés sur le même diagramme que précédemment. Soit ω une fréquence. A cette fréquence correspond une puissance proportionnelle à $\Phi_{ee}(\omega)$ qu'on lit directement sur ce dernier graphique. Si cette puissance est inférieure à la puissance que peut fournir le moteur, on déduira l'amplitude correspondante de la grandeur d'entrée sur le vérin, d'où le point figuratif sur le diagramme θ_e, θ_s . On voit alors, pour chaque fréquence du spectre de la fonction d'entrée, si le système est linéaire ou non.

Si la puissance, lue sur la courbe spectrale, est supérieure à la puissance maximum susceptible d'être fournie par l'organe linéaire, l'amplitude correspondante sera donnée par la courbe hachurée, d'où une première cause de non linéarité. Par contre, le point figuratif, sur le diagramme θ_e, θ_s , pourra correspondre à un point de la zone non linéaire. Dans ce cas, il faudra d'abord choisir un autre type d'organe linéaire.

On peut, d'ailleurs rappeler sur ce dernier diagramme le domaine dans lequel les points figuratifs *doivent* se trouver : ce domaine se déduit de la courbe frontière du plan (θ_e, ω) .

En conclusion, chaque fois qu'un organe non nécessairement linéaire dans la bande de fréquence possible est commandé par un organe linéaire dans cette bande de fréquence — cas général — on peut tracer les trois diagrammes : $\theta_e, \theta_s; \theta_e, \omega; \omega, \Phi_{ee}(\omega)$, et partant d'une fonction aléatoire donnée, trouver si l'organe étudié travaille dans une zone linéaire ou non.

(1) M. D. P. CAMPBELL [9] a développé le problème des systèmes asservis linéaires considérés du point de vue énergétique.

4.2 REMARQUES SUR LE CALCUL DES SYSTÈMES NON LINÉAIRES

4.2.1 Problème.

Comme pour les systèmes linéaires, le problème qui nous intéresse est la détermination du spectre énergétique de sortie d'un élément non linéaire ou d'un système comportant un ou des éléments linéaires. Il s'agit donc d'un comportement *moyen* du système.

Toute tentative de représentation d'un système non linéaire par un nombre fini de paramètres semble vaine. Ceci tient au fait que le principe de superposition n'est pas valable pour ces systèmes. La décomposition du signal d'entrée en série de Fourier reste inapplicable pour un système non linéaire, puisque les différents termes du développement donnent des termes produits. Une première conséquence conduit à essayer d'étudier un système non linéaire par une succession d'excitations de différentes fréquences et différentes *amplitudes*.

Dans le plan complexe, on peut tracer une famille de « courbes de Nyquist » graduées en fréquence et caractérisées par l'amplitude d'entrée [8].

L'une de ces courbes passe par le point -1 , l'amplitude correspondante indique l'amplitude de l'*oscillation limite* dont la fréquence se lit sur la graduation correspondante.

Par contre, l'utilisation de ce réseau pour déterminer la réponse à une excitation quelconque est difficile et approchée.

L'équivalent de l'analyse harmonique pour les systèmes linéaires est l'étude de la réponse à un bruit *blanc* pour les systèmes non linéaires. Un bruit *blanc* peut être considéré comme contenant toutes les fréquences et toutes les amplitudes. La réponse du système à un tel bruit est le test le plus complet que l'on puisse infliger au système. Par contre, seules les propriétés statistiques du signal de sortie peuvent être étudiées. Le temps d'enregistrement doit être suffisamment long pour que « tous les cas d'entrées » se soient produits.

Une autre différence fondamentale, entre les systèmes linéaires et les systèmes non linéaires, concerne l'existence d'une loi liant la caractéristique amplitude-fréquence à la caractéristique phase-fréquence pour les systèmes linéaires et pour ceux-là seulement.

La loi Bayard-Bode, résultant directement des propriétés des fonctions analytiques dans le plan complexe, lie le rapport $A(\omega)$ des amplitudes des fonctions d'entrée et de sortie et leur différence de phase par les relations :

$$A(\omega) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos \omega t \, dt \int_0^\infty \sin \omega t \, du \cdot \Theta(u),$$

$$\Theta(\omega) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin \omega t \, dt \int_0^\infty \cos ut \, du \cdot A(u).$$

Ces relations ne sont d'ailleurs qu'un cas particulier des relations liant la partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction analytique.

Au contraire, aucune relation analogue n'existe pour les systèmes non linéaires. Il ne peut, d'ailleurs, être question de définir un rapport d'amplitude puisque celui-ci

dépend de l'amplitude *absolue* de la fonction d'entrée. Cette propriété est certainement en faveur de ces systèmes. S'il s'avère, en effet, que la courbe amplitude-fréquence est correcte tandis que la courbe phase-fréquence est à corriger, seul un système non linéaire pourra satisfaire ce problème. Malheureusement, l'introduction de la non-linéarité ne peut se faire que par approximations successives sans loi précise.

4.2.2 Exemple.

Nous prendrons le schéma le plus simple de la saturation d'amplitude; nous supposons qu'il n'y a pas de retard dynamique (retard de phase). Ce cas est souvent appelé « écrêteur parfait » en radiotechnique.

L'écrêteur est défini par sa caractéristique amplitude entrée-amplitude sortie supposée indépendante de la fréquence. C'est le cas d'une diode, par exemple, utilisée dans une bande de fréquence convenable (*fig. 47*).

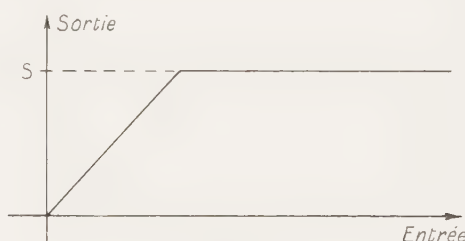


Fig. 47

Cette caractéristique permet de faire l'approximation d'un grand nombre de systèmes.

Nous signalerons, en particulier, le cas du « fil chaud » que nous avons utilisé dans des mesures de la turbulence atmosphérique. Le fil chaud a une caractéristique sensiblement parabolique, présentant une saturation à partir d'une certaine vitesse du vent (voir chap. V, choix des sondes).

Le problème est le suivant : étant donné une fonction aléatoire stationnaire dont les propriétés statistiques sont connues, en particulier sa probabilité de distribution en amplitude, quel sera le spectre de la fonction de sortie de l'écrêteur ? Éventuellement, pour le cas où cet écrêteur serait suivi d'autres éléments actifs, détermination de la loi $p(n, \tau)$ de la fonction de sortie.

La méthode graphique consistant à prendre une épreuve de la fonction aléatoire d'entrée et d'en étudier l'autocorrélation directement, en ayant soin de munir le lecteur de l'appareil autocorrélateur d'une butée (mécanique ou électrique) ⁽¹⁾, est la plus simple, mais peut ne pas être la plus rapide.

(1) Le procédé le plus simple que l'on utiliserait dans le cas de la machine O.M.E. 15, qui sera mentionnée au paragraphe 4.3, consisterait à court-circuiter le potentiomètre du chariot asservi à suivre la courbe, à partir de l'ordonnée σ . La calculatrice recevrait donc une tension qui serait égale à la tension d'entrée, si celle-ci est inférieure à σ , et constante (et égale à σ) si cette tension est supérieure à σ : c'est précisément ce que serait la fonction de sortie.

On peut obtenir plus rapidement un résultat approché de la façon suivante :

— employons les mêmes notations que pour l'étude des relais (§ 3,2.5), a_i, b_j désignant les ordonnées courantes sur deux axes distants de τ secondes de la fonction d'entrée, a_i, b_j les ordonnées correspondantes de la fonction de sortie (*fig. 48*), soit σ la valeur de la fonction de sortie correspondant à la saturation. Nous calculons :

$$(4,5) \quad \varphi_{ss}(\tau) = \sum_{ij} a'_i b'_j p_{a'_i} p_{b'_j} \Big|_{\tau},$$

soit $\varphi_{ee}(\tau)$ la fonction d'autocorrélation de la fonction d'entrée :

$$(4,6) \quad \varphi_{ee}(\tau) = \sum_{ij} a_i b_j p_{a_i} p_{b_j} \Big|_{\tau}.$$

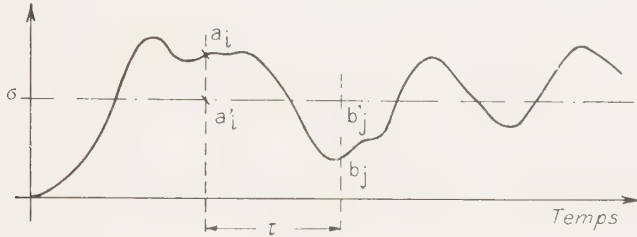


Fig. 48

Décomposons cette somme en quatre sommes partielles :

$$(4,7) \quad \varphi(\tau) = \sum_{\substack{a_i \leq \sigma \\ b_j \leq \sigma}} + \sum_{\substack{a_i > \sigma \\ b_j < \sigma}} + \sum_{\substack{a_i \leq \sigma \\ b_j > \sigma}} + \sum_{\substack{a_i > \sigma \\ b_j > \sigma}}$$

qu'on appellera respectivement :

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \varphi_3, \quad \varphi_4.$$

La fonction d'autocorrélation de la fonction de sortie peut se déduire par correspondance univoque des $a_i b_j$ aux $a'_i b'_j$ à partir de (4,7). On obtient :

$$(4,8) \quad \begin{aligned} \varphi_{ss}(\tau) = & \varphi_1 + \sigma(1 - F(\sigma)) \sum_{b_j < \sigma} b_j p_{b_j} \Big|_{\tau} \\ & + \sigma \sum_{a_i < \sigma} a_i p_{a_i} \Big|_{\tau} + \sigma^2 \sum_{b_j < \sigma} p_{b_j} \Big|_{\tau} \\ & + \sigma^2 (1 - F(\sigma)) \sum_{a_i < \sigma} p_{a_i} \Big|_{\tau}, \end{aligned}$$

où $F(\sigma)$ représente la fonction de répartition des amplitudes de la fonction d'entrée :

$$F(\sigma) = \text{prob } f(t) \leq \sigma.$$

Hors le premier terme φ_1 , on peut donner une expression mathématique simple des termes du second membre de (4,8).

CALCUL DE $\sum p_{b_j}^{a_i} \frac{\sigma}{\tau} \frac{\tau}{\sigma}$.

La condition *nécessaire* et suffisante pour que b_j soit plus grand que σ est qu'il y ait un nombre *pair* de zéros dans l'intervalle τ pour la courbe :

$$(4,9) \quad g(t) = f(t) - \sigma,$$

dont nous supposons connue la loi $p(n, \tau)$ donnant le nombre de zéros de la fonction aléatoire ⁽¹⁾.

Le dernier terme de (4,4) est donc :

$$\sigma^2 (1 - F(\sigma)) \sum_{n \text{ pair}} p(n, \tau).$$

CALCUL DU TROISIÈME TERME.

On sait que a_i est inférieur à σ , on cherche, dans ces conditions, la probabilité pour que $b_j > \sigma$. Ici encore cette probabilité conditionnelle est donnée par la somme $\sum_{n \text{ imp}} p(n, \tau)$. Le troisième terme s'exprime alors par :

$$\sigma \sum_{n \text{ imp}} p(n, \tau) \sum a_i p_{a_i};$$

or, $\sum a_i p_{a_i}$ est l'espérance mathématique des a_i , c'est donc une constante, déduite directement de la fonction de répartition $F(\sigma)$; soit A cette constante :

$$(4,10) \quad A = \sum a_i p_{a_i};$$

le troisième terme est donc :

$$\sigma A \sum_{n \text{ imp}} p(n, \tau).$$

CALCUL DU DEUXIÈME TERME.

On sait que $a_i > \sigma$, on cherche la probabilité conditionnelle pour avoir b_j (pour $b_j < \sigma$ seulement). Cette probabilité conditionnelle est le produit de la probabilité d'avoir d'un nombre impair de zéros (condition nécessaire) et de probabilité d'avoir la valeur b_j :

$$(4,11) \quad p_{b_j < \sigma}^{a_i > \sigma} = p_{b_j} \sum_{n \text{ imp}} p(n, \tau);$$

(1) Il est peut-être bon de rappeler qu'il s'agit de fonctions aléatoires et que, ce que nous appelons $f(t)$ ou $g(t)$, sont en réalité des épreuves des fonctions aléatoires $f(t, E)$ ou $g(t, E)$, où E est un paramètre d'identification de l'épreuve.

le deuxième terme est donc :

$$\sigma [1 - F(\sigma)] \sum_j b_j p_{b_j} \sum_{n \text{ imp}} p(n, \tau);$$

or, $b_j p_{b_j}$ est l'espérance mathématique des ordonnées. C'est A, le troisième terme est donc :

$$(4,12) \quad \sigma [1 - F(\sigma)] A \sum_{\text{imp}} p(n, \tau).$$

Reste le premier terme pour lequel nous ne pouvons pas trouver d'expressions analogues. Par contre, il est souvent possible de trouver une expression approchée convenant au problème considéré.

En général, la connaissance de la fonction d'autocorrélation au voisinage de $\tau = 0$ nécessite une précision beaucoup plus grande que pour les grandes valeurs de τ . (Les « fréquences élevées » du spectre d'énergie correspondent aux faibles valeurs de τ .)

Soit k le nombre moyen de zéros par seconde.

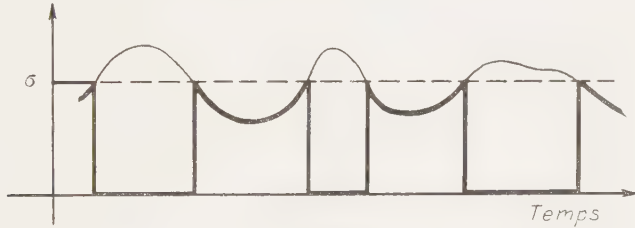


Fig. 49

Cherchons la valeur moyenne des instants durant lesquels la fonction reste inférieure à σ (fig. 49). Si $p(n, \tau)$ est la loi de distribution des zéros de la fonction $g(t)$, $p(0, \tau)$ représente la probabilité pour que l'on n'ait aucun zéro dans l'intervalle τ . La valeur moyenne des instants pendant lesquels il n'y a pas de changement de signe est :

$$(4,13) \quad T = \int_0^{\infty} \tau p(0, \tau) d\tau.$$

Ce temps T correspond effectivement à la moyenne des instants pendant lesquels la fonction est inférieure à σ , si $\frac{F(\sigma)}{1 - F(\sigma)}$ est supérieur à 0,5. Deux cas sont donc à distinguer :

Premier cas : $\frac{F(\sigma)}{1 - F(\sigma)} \geq 0,5.$

La fonction qui a pour fonction d'autocorrélation φ_1 se présente sous la forme de la figure 50.

Dans ce cas, une bonne approximation consistera à calculer (ou à déterminer expérimentalement) la fonction d'autocorrélation de la fonction aléatoire $h(t)$, représentée ci-dessus dans un intervalle :

$$0 \leq \tau \leq \frac{T}{2}.$$

La machine décrite au paragraphe 4,3 effectue ce calcul en un temps réduit sensiblement dans le rapport :

$$\left(\frac{1 - F(\sigma)}{F(\sigma)} \right)^2 \frac{\tau_{\max}}{T}$$

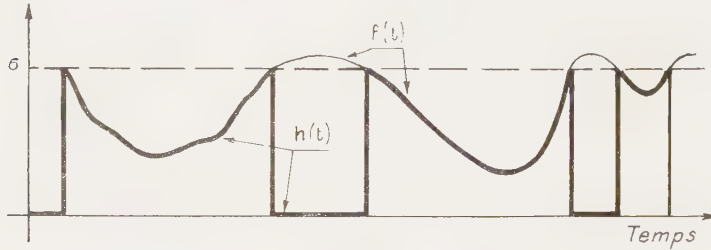


Fig. 50

(par rapport au calcul direct de la fonction d'autocorrélation de $f(t)$) $\tau_{\max}$ représente le temps au bout duquel la fonction d'autocorrélation de $f(t)$ devient négligeable ou imprécise.

Deuxième cas : $\frac{F(\sigma)}{1 - F(\sigma)} < 0,5$.

La fonction $h(t)$ se présente alors sous la forme de la figure 51.

Cette fonction est plus souvent nulle que non nulle. Le calcul de la fonction d'autocorrélation dans un intervalle égal à :

$$\frac{F(\sigma)}{1 - F(\sigma)} T$$

est suffisant.

Le temps nécessaire pour le calcul de φ_1 est encore plus réduit que dans le cas précédent.

Il est souvent possible de donner des expressions approchées pour φ_1 .

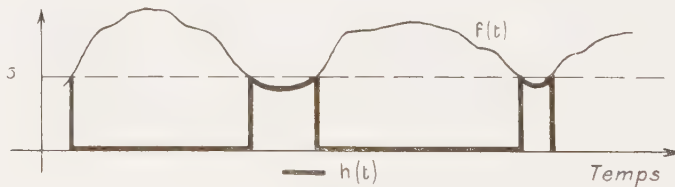


Fig. 51

Lorsque le système présente un « retard dynamique » en plus d'une linéarité d'amplitude, le calcul de la fonction d'autocorrélation est plus difficile.

4.2.3 Caractéristiques moyennes d'un système non linéaire.

Plutôt que de rechercher la caractérisation d'un système par un nombre fini de coefficients ou d'équations, on peut s'attacher directement aux valeurs moyennes de la fonction de sortie pour une fonction aléatoire d'entrée déterminée.

Le schéma le plus satisfaisant serait celui de la *figure 52*.

Nous pensons que le problème est possible : connaissant le spectre de réponse du système non linéaire à un « bruit blanc », d'une part, ou le spectre correspondant à la corrélation entrée-sortie, la loi de passage du spectre du bruit blanc à celui de la fonction aléatoire considérée, d'autre part, comment déduire le spectre de la fonction aléatoire réponse de l'entrée, du spectre obtenue lorsque cette entrée est un bruit blanc.

Notons que ce type de solution est satisfait pour les systèmes linéaires.

En effet, calculons la fonction de corrélation mutuelle entrée-sortie pour un système linéaire, lorsque l'entrée est une fonction aléatoire stationnaire $f_e(t)$:

$$(4,14) \quad \varphi_{ee} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f_e(t) f_e(t + \tau) dt.$$

En désignant, temporairement, par $h(t)$ la réponse impulsionnelle du circuit :

$$(4,15) \quad f_s(t) = \int_0^{\infty} h(\sigma) f_e(t - \sigma) d\sigma,$$

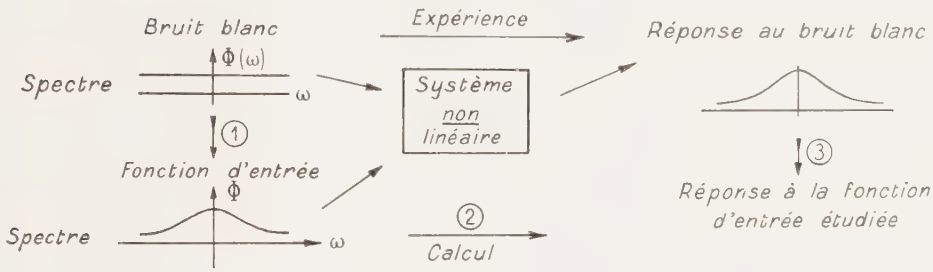


Fig. 52

d'où :

$$(4,16) \quad \varphi_{es}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} dt f_e(t) \int_{-\infty}^{+\infty} h(\sigma) f_s(t + \tau - \sigma) d\sigma.$$

Prenons la transformée de Fourier généralisée (1), on trouve facilement la relation entre les spectres et la « fonction de transfert » du circuit :

$$(4,17) \quad \Phi_{es}(\lambda) = H(\lambda) \cdot \Phi_{ee}(\lambda).$$

En particulier si $f_e(t)$ est un bruit blanc dont le spectre est constant et égal à a^2 :

$$(4,18) \quad \Phi_{es}(\lambda) = H(\lambda) a^2;$$

la mesure de la corrélation entrée-sortie, dans le cas d'un bruit blanc, suffit à déterminer la fonction de transfert du système.

(1) Ce calcul est analogue à celui qui a été fait au chapitre II. Nous renvoyons à ce chapitre pour le détail du calcul.

Le spectre $\Phi_{ss}(\lambda)$ de la réponse du circuit à une fonction d'entrée aléatoire stationnaire dont le spectre est $\Phi'_{ee}(\lambda)$ est directement donné par la relation :

$$(4,19) \quad \Phi'_{ss}(\lambda) = \left| \frac{\Phi_{es}(\lambda)}{a^2} \right| \Phi'_{ee}(\lambda)$$

(en vertu de la relation (1,52) établie au § 1,25).

ÉTUDE DE LA CORRÉLATION ENTRÉE-SORTIE.

Les relations (4,14) à (4,19) ne sont valables que pour les systèmes linéaires.

Supposons que l'on étudie la réponse d'un système *non linéaire* à une fonction aléatoire stationnaire. On peut toujours, au moins expérimentalement, étudier la corrélation mutuelle entrée-sortie.

Cette fonction se présente sous la forme suivante (fig. 53).

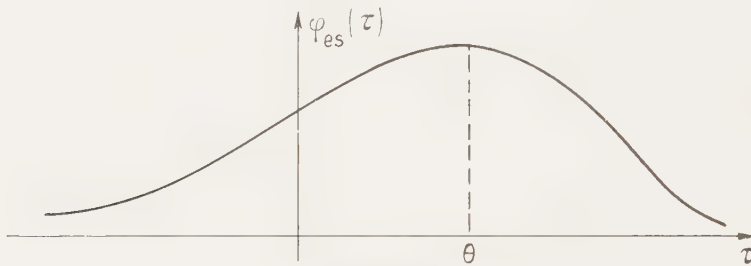


Fig. 53

On peut en déduire conventionnellement :

- que le retard (si $\theta > 0$; avance si $\theta < 0$) moyen du système est égal à θ s;
- que la « distorsion du système » est égale à :

$$\frac{\varphi_{es}(\theta)}{f_e^2(t)}$$

où $f_e^2(t)$ représente la valeur moyenne quadratique de la fonction d'entrée.

En particulier, pour un système linéaire soumis à une excitation sinusoïdale, la courbe φ_{es} représente aussi bien les phénomènes qu'un diagramme de Nyquist.

Par rapport au système linéaire, il faut s'attendre à ce que l'intervalle de temps minimum, pour calculer la fonction d'autocorrélation du signal de sortie, soit beaucoup plus grand que dans le cas des systèmes linéaires. Au balayage de fréquence, réalisé par une fonction aléatoire, seul nécessaire pour la caractérisation d'un système linéaire, doit se superposer un balayage en *amplitude*, également réalisé par une fonction aléatoire.

1.2.1 Introduction des éléments non linéaires dans la synthèse des systèmes asservis.

Lorsque le système est non linéaire, il n'est pas possible de trouver une relation se traduisant par un produit soit dans le domaine fréquence, soit dans le domaine temps.

Au chapitre III (Relais) nous avons vu qu'on peut calculer le spectre de la fonction réponse d'un relais à une fonction d'entrée. Mais cette relation ne correspond pas aux fonctions de transfert et les calculs faits au chapitre II pour la détermination de la fonction de transfert ne sont plus utilisables directement.

Reprenons le schéma du chapitre II (*fig. 54*), dans lequel nous supposons qu'on introduise un élément non linéaire; un relais, par exemple, avant l'étage de puissance.

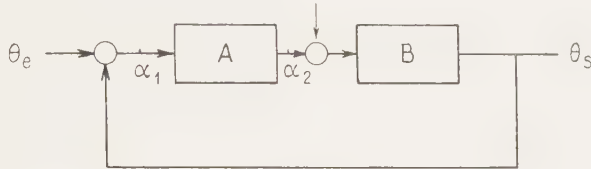


Fig. 54

Remplaçons la « boîte » A par l'ensemble A_1, R, A_2 , où R est l'élément linéaire (*fig. 55*).

La méthode exposée ci-dessous présume que le système optimum est *linéaire*.

On détermine le filtre optimum A, en partant du premier schéma, et l'on détermine les spectres $\alpha_1(\omega)$ et $\alpha_2(\omega)$, spectre du signal et spectre des couples moteurs.

On détermine A de telle façon que le spectre du signal d'erreur soit le même que dans le premier schéma. A_1 est imposé éventuellement (sinon faire $A_1 \equiv 1$).

Partant de α_1 , que l'on suppose identique à ε_1 , on calcule ε_2 par la relation linéaire :

$$\varepsilon_2 = A_1 \varepsilon_1;$$

puis ε_3 , en fonction de ε_2 par une relation fonctionnelle correspondant à la réponse du système non linéaire pour l'entrée considérée. Dans le cas d'un relais ce serait la relation (3,18).

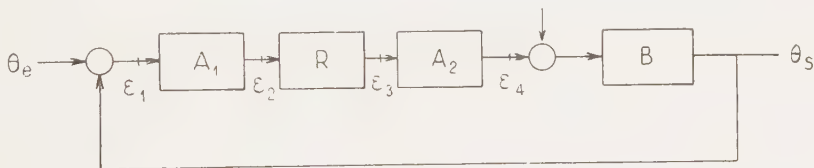


Fig. 55

Enfin, on détermine le second réseau correcteur A_2 , à partir des spectres d'entrée et de sortie, ce dernier étant assimilé au spectre du premier schéma :

$$A_2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} \cdot \frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

4,2.5 Remarques.

a) Autres méthodes d'analyse des systèmes non linéaires. Méthode de Blanc-Lapierre et méthode de S.O. Rice, pour l'étude de la réponse d'un système non linéaire

à un bruit; S.O. RICE part de l'hypothèse que le système non linéaire peut être représenté par une expression de la forme :

$$(4,20) \quad I = \frac{1}{2\pi} \int_C F(Iu) e^{iVu} du,$$

où I est l'intensité (grandeur de sortie) et V la tension (grandeur d'entrée) relative au système. Le système est alors caractérisé par $F(Iu)$ et C , contour d'intégration [13].

A titre d'exemple, RICE donne le cas de l'écrêteur parfait où :

$$(4,21) \quad \begin{aligned} I &= -\alpha D, & \text{si} & & V < -D, \\ I &= \alpha V, & & & -D < V < D, \\ I &= \alpha D, & & & V > D; \end{aligned}$$

on peut représenter l'écrêteur par :

$$(4,22) \quad I = \frac{2\pi}{\pi} \int_0^\infty \sin Vu \sin Du \frac{du}{u^2}.$$

Ayant une représentation analytique du système non linéaire, on peut effectuer des calculs analogues au cas linéaire, mais beaucoup plus compliqués.

La méthode de BLANC-LAPIERRE [14] conduit à des résultats analogues. A titre d'exemple, si le système linéaire est caractérisé uniquement par une non-linéarité d'*amplitude* sans retard dynamique $y = f(x)$, on peut calculer la valeur moyenne de y , l'écart type $\sigma = \sqrt{[y(t) - \overline{y(t)}]^2}$ et la fonction d'autocorrélation : $y(t) y(t + \theta)$ directement. Nous utiliserons cette méthode au chapitre suivant pour le calcul de la fonction d'autocorrélation des vitesses de vent. L'étalonnage d'un « fil chaud » donne la loi $y = f(x)$ point par point.

Nous noterons que, si la loi $y = f(x)$ est une loi parabolique, il est facile de former directement $y = x^2$ à partir de x , par exemple, à l'aide d'un thermocouple. La sortie du thermocouple est connectée directement à l'autocorrélateur (1).

Enfin, on rappelle que la simplicité de cette méthode tient au fait que le système n'a pas de *retard dynamique*. Il peut donc être utile d'utiliser, chaque fois que c'est possible, un détecteur ayant une grande bande passante par rapport aux fréquences du phénomène étudié afin de pouvoir considérer uniquement la caractéristique amplitude-entrée-sortie, indépendamment des fréquences mises en jeu;

b) méthode de M. WIENER pour l'étude des systèmes non linéaires.

M. N. WIENER a récemment (2) proposé, à un groupe d'ingénieurs français, la méthode ci-après pour l'étude d'un système non linéaire.

(1) Ce dispositif est utilisé dans l'autocorrélateur de M. FAVRE, à Marseille (*Étude de la turbulence en soufflerie*).

(2) Janvier-mai 1951.

Soit P le système linéaire à étudier (*fig. 56*).

On part d'un bruit blanc que l'on injecte à la fois dans la boîte Q et dans la boîte P.

La boîte Q est constituée par une série de réseaux en treillis qui ont pour but de fournir les différents coefficients successifs d'un développement d'une fonction aléatoire, correspondant à un bruit blanc en série de Laguerre. La boîte R forme, à partir de ces coefficients, les coefficients successifs du développement du bruit blanc en série de fonctions de Hermitte. Ceci tient au fait que si on développe un bruit blanc en série de Laguerre, les différents coefficients des termes du développement ont une distribution *gaussienne*. Ces différents termes correspondent aux fonctions de transfert des différentes mailles du réseau de la boîte.

Les coefficients du développement en série de Hermitte, de la réponse du circuit non linéaire P, sont obtenus après multiplication et intégration des sorties des boîtes P et Q.

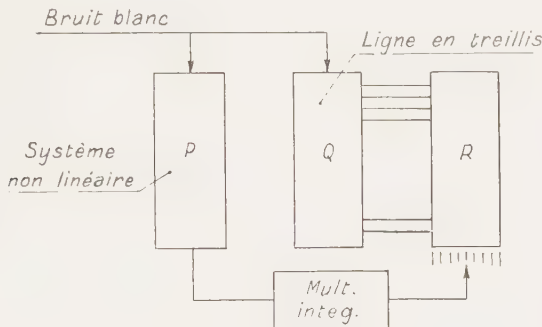


Fig. 56

La théorie de cette opération est parfaitement exacte, malheureusement, si l'on part des cinq premiers coefficients du développement en série du bruit blanc, on est conduit à caractériser la réponse de la boîte linéaire par 5^e coefficients dont la convergence est difficile à préciser.

4.3

MACHINES EXISTANTES OU PROPOSÉES POUR CES ÉTUDES STATISTIQUES

4.3.1 Données de base.

Pour mettre en œuvre les théories jusqu'ici exposées, il est absolument indispensable de posséder des moyens de calculs automatiques. Cette pénurie est, pensons-nous, la cause principale de la lenteur avec laquelle le calcul statistique pénètre les différentes techniques.

Il est nécessaire de posséder des « épreuves » des fonctions aléatoires considérées chaque fois que les fonctions statistiques (fonction de répartition, fonction d'autocorrélation, lois $p(n, t)$, etc.) ne peuvent être déterminées *a priori*.

L'élément de base pour toutes ces études est l'enregistrement que nous supposons photographique (l'enregistrement magnétique, en cours d'étude, posera le problème de l'adaptation des moyens de dépouillement des films). En général, le film des enregistreurs n'a pas une avance uniforme dans le temps. C'est au moins le cas des enregistreurs portatifs, un compte-temps donne l'échelle des temps qui varie en longueur d'environ 10 % entre le début et la fin de l'enregistrement (variation des inerties des bobines au cours du mouvement). De même, l'échelle des ordonnées n'est souvent pas linéaire : la loi de l'échelle est donnée par un étalonnage avant l'enregistrement.

Les fonctions liées à un enregistrement que nous avons rencontrées sont, par ordre d'importance :

- la fonction d'autocorrélation de la fonction aléatoire dont une épreuve est représentée par l'enregistrement;
- la loi $p(n, \tau)$;
- la fonction de répartition en amplitude.

4.3.2 Autocorrélateurs.

Il existe plusieurs types d'autocorrélateurs. Les machines O.M.E. 15, construites par la S.E.A. ⁽¹⁾ pour le Service Technique Aéronautique et les P.T.T. représentent une classe de machines universelles. Elles sont analogiques et possèdent des enregistreurs-lecteurs de courbes automatiques. Elles donnent, en plus de la fonction d'autocorrélation, le spectre.

Par contre, la machine nécessite la lecture sur une bande de papier où les échelles d'abscisse et d'ordonnée sont *linéaires*, sinon une transcription de l'enregistrement initial est nécessaire; outre l'imprécision de la reproduction et de la correction d'échelles, le temps nécessaire à l'obtention de la fonction d'autocorrélation est sensiblement accru. Nous avons proposé ⁽²⁾, pour l'exploitation de ces bandes, un autocorrélateur « mécanique ». On calcule l'expression $\int f(t) f(t + \tau) dt$ à l'aide de deux intégrateurs mécaniques à sphère de haute précision (Amsler) :

$$\left(\int f(t) f(t + \tau) dt = \int f(t + \tau) d \int f(t) dt \right).$$

La notion du temps réel — propre aux machines à calculer analogiques — disparaît, on peut alors faire varier la vitesse de défilement de la courbe à son gré et, en particulier, l'adapter au profil local de la courbe lue. On peut même arrêter la machine, puis repartir. Une correction de dilation des échelles des abscisses est réalisée par une variation lente de la distance entre les deux lecteurs.

D'autre part, la machine est conçue pour donner les coefficients successifs du développement d'une fonction expérimentale (fonction d'autocorrélation, en particulier) en série de Laguerre ou Legendre. Il suffit de tracer, une fois pour toutes, sur une bande

(1) Société d'Électronique et d'Automatisme, 138, boulevard de Verdun, Courbevoie (Seine).

(2) Au S.T.Aé qui a adopté le projet.

de papier, les fonctions représentées par les termes successifs du développement. Soit $P_n(x)$, le $n^{\text{ième}}$ terme (tous les termes sont orthogonaux), soit $F(x)$ la fonction expérimentale tracée sur une bande de papier qui se déroule d'une façon identique à celle portant $P_n(x)$, le $n^{\text{ième}}$ coefficient a_n est donné par :

$$(4,23) \quad a_n = \int_a^b F(x) \cdot P_n(x) dx,$$

où a , b représente l'intervalle dans lequel les polygones $P_n(x)$ sont orthogonaux (et normaux). La fonction $F(x)$ doit être tracée sur ce même intervalle.

Enfin la machine est portable et ne nécessite pratiquement aucun entretien. Il est cependant prévu, en plus de la lecture à main, une lecture automatique : celle-ci nécessite un châssis électronique.

4,3.3 Chronographe statistique.

L'idée initiale consistait en la réalisation d'un appareil permettant de mesurer les constantes de temps de relais et à classer les résultats d'un grand nombre d'essais (1 000 ou 10 000) automatiquement, en fonction de leur valeur.

Il s'est avéré que le matériel de base nécessaire à cette réalisation permettait, moyennant quelques adaptations, d'effectuer les principaux calculs statistiques sur les enregistrements.

Nous décrirons d'abord l'appareil initialement prévu pour les mesures de constante de temps des relais (ou des moteurs).

PRINCIPE.

Un quartz de 100 kh (*fig. 57*) sert d'étalon de temps : il fournit par démultiplication le 10 kh (période : 0,1 ms), le kh, le 100, 10 et 1 Hz. A partir du hertz en forme des impulsions carrées à fronts raides, l'impulsion positive commande le relais une fois par seconde. Le front de cette impulsion déclenche la décade (ou les deux décades en série) totalisatrice de millisecondes. On règle le sélecteur sur la valeur entière de millisecondes supposée minimum pour la fermeture du relais. Supposons qu'on affiche 4 ms (c'est-à-dire qu'on est sûr que le relais ne se fermera pas avant 4 ms). Arrivée à la 4^e ms, la « gate » G_2 enclenche la décade (ou les deux décades en série) totalisatrices de 1/10 de ms. Lorsque le contrat étudié du relais se ferme, il provoque, par sa fermeture même, le blocage des décades de dixième de millisecondes qui restent dans l'état où elles se trouvaient au moment de la fermeture du relais, tandis que les décades B (millisecondes) continuent à totaliser. Lorsque la vingtième milliseconde est comptée, une impulsion est envoyée sur le multivibrateur M qui bascule et commande le relais de « lecture ». Ce relais met la haute tension sur l'ensemble des dix (ou vingt) triodes dont les grilles sont connectées aux dix (ou vingt) unités des décades. Donc, seule parmi ces dix (ou vingt) triodes est conductrice celle qui correspond à la dernière unité qui a été indiquée par la (ou les) décades au moment de la fermeture du relais étudié. Cette haute tension n'est appliquée que pendant le temps de basculement du multivibrateur.

La plaque de chacune des triodes est « chargée » par l'électro-aimant d'un numéroteur.

La triode « conductrice » envoie donc une impulsion dans le numéroteur correspondant.

Chacun des dix (ou vingt numéroteurs) totalise ainsi le nombre de fois où le relais s'est fermé après 4,1, 4,2, 4,9, 5 (ou 4,1, 4,2 ... 6) ms. On obtient donc directement la loi de probabilité des instants de fermeture du relais.

L'impulsion négative qui suit l'impulsion positive (qui sert à commander le relais) est utilisée pour remettre les décades à 0 afin qu'elles soient prêtes à recevoir les prochains ordres.

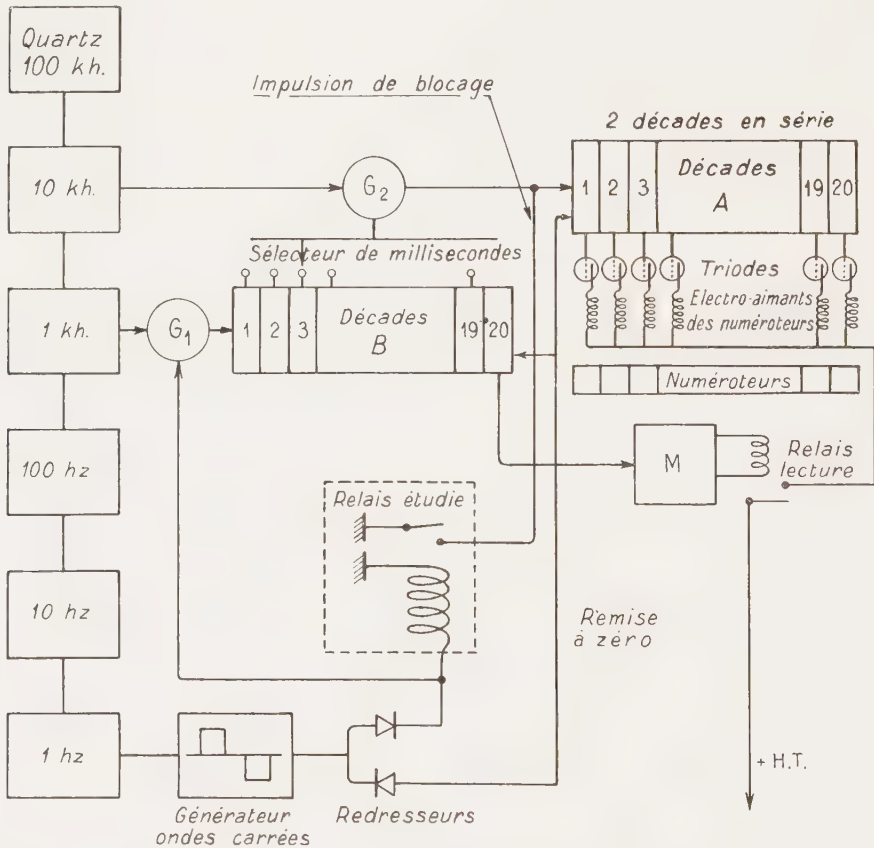


Fig. 57. — Appareil permettant la mesure et le classement des constantes de temps (relais)

L'ensemble de ces opérations, étalé dans le texte ci-dessus sur 1 s, peut l'être sur 1/2 s, voire 0,1 s pour des relais rapides. La fréquence de répétition est alors 3 600, 7 200 ou 36 000 par heure. Il est à noter que le fonctionnement de la machine est entièrement automatique.

Le principe de la machine ⁽¹⁾, tel qu'il est décrit ici, conduit, en fait, à une réalisation très légèrement différente. Dans un but d'économie de matériel, on a en effet

(1) Le S.T.Aé fait construire une machine fondée sur ce principe. Mais, comme il est dit plus haut, ceci n'est qu'une partie de la machine appelée « chronographe statistique ». La réalisation est confiée aux Établissements Ed. Belin, qui termineront l'ensemble en juillet 1952.

avantage à utiliser des décades 1, 2, 4, 8 et à lire le complément du nombre de millisecondes plutôt que ce nombre lui-même. Ces détails techniques correspondent aux différentes réalisations possibles.

Enfin, notons qu'il n'est guère plus compliqué de mettre les décades non pas en série (décompte de 0 à 19), mais cascade unités-dizaines, ce qui permet de compter de 1 à 99.

De même, il va de soi que ce matériel peut être utilisé pour mesurer et classer des intervalles de temps de l'ordre de grandeur de la milliseconde (de 0,1 à 10 par exemple), relatifs à n'importe quel appareil susceptible d'être commandé en répétition (constante de temps de moteur, etc.).

DÉPOUILLEMENT D'UNE COURBE (en particulier dépouillement d'une épreuve d'une fonction aléatoire).

a) Lecture d'une courbe point par point. Il s'agit de relever les ordonnées soit de millimètre en millimètre, par exemple sur l'enregistrement, soit de seconde en seconde en se servant de la base de temps (photographiée sur la même bande).

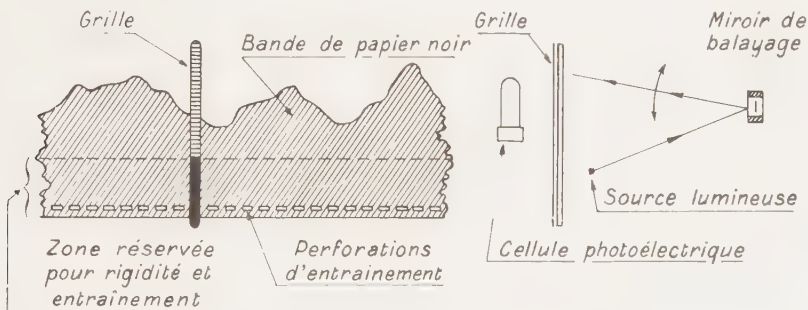


Fig. 58. — Schéma du lecteur de courbes

Afin de s'affranchir des phénomènes de contraste optique ou de voile partiel du film, ou simplement de l'enchevêtrement des courbes enregistrées, la première opération (et la seule faisant intervenir un opérateur) consiste à découper une courbe identique dans une bande de papier (noir) dont un bord est perforé (1). Ces perforations équidistantes servent à l'entraînement et également à matérialiser l'échelle des longueurs (fig. 58). L'échelle des temps peut être matérialisée par une petite perforation toutes les secondes (ou $n^{\text{ième}}$ de s). Ces perforations effectuées au-dessus des perforations de longueurs n'ont aucune raison d'être équidistantes. Elles peuvent être réalisées automatiquement à partir des « tops » du compte-temps.

Cette bande avance pas à pas, soit d'après les perforations « longueurs », soit d'après les perforations « temps » suivant le résultat recherché.

Une grille transparente, sur laquelle sont gravés (ou marqués) des traits parallèles à l'abscisse, est appliquée contre cette bande. La distance des traits est fixée par la loi

(1) Découpage effectué par un poinçon vibrant. Après quelques essais, nous avons retenu un poinçon de 2/10 de mm, aiguille de machine à coudre meulée, vibrant à 1 000 Hz. (Puissance de sortie de l'ampli 20 W.)

d'étalonnage de l'appareil enregistreur (ou de l'ensemble d'appareils : pick-up, amplificateur, répéteur). Si celui-ci est linéaire, les traits sont simplement équidistants.

Lorsque la bande est immobilisée, un spot lumineux défile rapidement le long de la grille, et une cellule placée sous la grille, derrière le film, compte le nombre de traits que le film n'a pas caché (*fig. 59*). Cette cellule est liée à un amplificateur qui communique ces impulsions à des décades électroniques totalisatrices;

b) à l'aide du même dispositif de lecture, précédemment décrit, on peut envoyer une impulsion dans le numéroteur ⁽¹⁾ correspondant à la valeur de l'ordonnée de la courbe lue, on obtient ainsi la fonction de répartition de la fonction aléatoire, sous réserve que l'épreuve considérée soit assez longue pour que les propriétés statistiques de cette fonction aléatoire soient en « équilibre »;

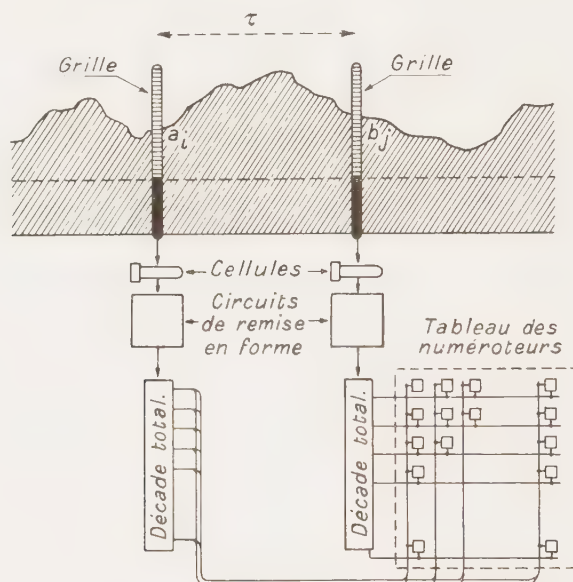


Fig. 59. — Chronographe statistique utilisé en autocorrélateur

c) on peut, à l'aide d'un complément au dispositif de lecture, envoyer l'état des décades sur une roue imprimante, la machine imprime alors automatiquement les valeurs des ordonnées, compte tenu de la correction de non-linéarité, éventuellement lues de fraction de millimètre en fraction de millimètre, fraction de seconde en fraction de seconde;

d) fonctions d'autocorrélation. — Il ne semble pas avantageux de calculer sur la machine les fonctions d'autocorrélation en général. Cependant, dans des cas particuliers, tels que ceux signalés au paragraphe 4,2.2 (écrêteur parfait), le calcul peut se faire assez simplement et avec une bonne précision. On peut procéder comme suit :

— connaissant la fonction de répartition $F(y)$ de la courbe à analyser et la tension d'écrêtage σ on utilise deux grilles (et leurs cellules), du type précédemment décrit,

(1) Il y a cent numérateurs (disposés suivant un carré de 10×10 pour permettre la photographie) sur le chronographe statistique du S.T.Aé.

décalées de τ s. Les intervalles sur chacune de ces deux grilles ne sont pas nécessairement équidistants; ils sont répartis au-dessous de l'ordonnée σ et uniquement, *grosso modo*, inversement, proportionnellement à la valeur $dF(Y)/dY$. Cette méthode est la façon la plus précise de répartir les points.

Les cellules situées derrière les grilles sont connectées aux décades et celles-ci sont connectées en « cross-bar » sur les numérateurs P.T.T. La lecture des décades A et B s'effectue simultanément (pendant le temps où le film avance) et une impulsion est envoyée dans le numérateur de coordonnées a_i , b_j , a_i et b_j étant les intervalles lus respectivement sur chacune des grilles. Le nombre totalisé dans chaque compteur, divisé par le nombre total de points prélevés, donne la probabilité conditionnelle $p_{b_j|a_i}^{\tau}$. On calcule la fonction d'autocorrélation par l'équation déjà donnée :

$$\varphi(\tau) = \sum a_i p_{a_i} b_j p_{b_j|a_i}^{\tau};$$

p_{a_i} est donné par la fonction de répartition :

$$p_{a_i} = \left| \frac{dF(Y)}{dY} \right|_{y=a_i}.$$

ou peut se calculer par le même procédé, et les $p_{b_j|a_i}^{\tau}$ se lisent (par photographie) sur le tableau numérateur. A l'aide d'une machine à calculer de bureau, on effectue le reste des calculs.

TEMPS POUR AVOIR UN POINT DE LA COURBE DE $\varphi(\tau)$.

Nous prenons un enregistrement de 2 m de longueur, avec lecture tous les 2 mm, soit mille points, la machine peut avancer à raison de deux points à la seconde d'une façon normale. Le tableau des $p_{b_j|a_i}^{\tau}$ est donc formé en 500 s, soit un peu moins de 10 mn. Le nombre d'opérations à effectuer sur la calculatrice de bureau est fonction du nombre de segments a_i choisi.

Supposons que l'on dispose de cent numérateurs, répartis suivant un carré de 10×10 : on a donc dix segments a_i et dix segments b_j (non uniformément répartis, rappelons-le); le nombre d'opérations à effectuer dans ce cas est de cent vingt multiplications et quatre-vingt-onze additions. Les machines modernes ⁽¹⁾ permettent d'effectuer tous ces calculs en 9 mn.

Soit, au total : $10 + 9 = 19$ mn pour un point de $\varphi(\tau)$.

Avec les machines à cartes perforées ⁽²⁾, on calcule un point de $\varphi(\tau)$ en $10 + 2 = 12$ mn;

e) fonctions $p(n, \tau)$. — C'est une fonction à deux variables. C'est, rappelons-le, la fonction des deux variables n et τ qui donne la probabilité d'avoir n zéros dans un intervalle de temps τ . Nous supposons déjà déterminée la valeur de l'ordonnée, sur laquelle on doit compter le nombre de zéros.

(1) Décompte fait avec une machine de bureau Monroe automatique.

(2) Décompte fait d'après les caractéristiques de la calculatrice I.B.M. électronique.

Plusieurs méthodes sont possibles :

1° sur les deux grilles, on ne ménage qu'un petit segment transparent à la hauteur, de l'ordonnée choisie. Lorsque la courbe défile sur les grilles, la cellule fait basculer un multivibrateur chaque fois que la courbe a une ordonnée égale à celle de la « fenêtre » (fig. 60). On procède alors comme suit :

— on trace la fonction $p(n, \tau)$, en choisissant une valeur de τ et en comptant le nombre de fois où l'on obtient 1, 2, 3, ... n zéros dans cet intervalle. Pour cela, on part d'une position où les deux grilles sont côte à côte, puis on déplace l'une des grilles pour l'amener à la distance τ (ou on déplace le film sous elle). Au cours de ce mouvement la grille, connectée à son multivibrateur et à sa décade, a totalisé le nombre de zéros qui existent; puis la courbe défile, sur l'ordonnée choisie de l'élément considéré, rapidement d'un mouvement continu et les deux décades totalisent le nombre de zéros qui ont défilé sous elles. Ces décades sont lues à intervalles réguliers (en synchronisme avec le déroulement du film) et l'indication de leur différence est envoyée dans un ensemble de numérateurs P.T.T.; les probabilités $p(1, \tau)$, $p(2, \tau)$... sont données directement par les quotients des nombres lus dans les numérateurs par N . Le temps de cette opération est

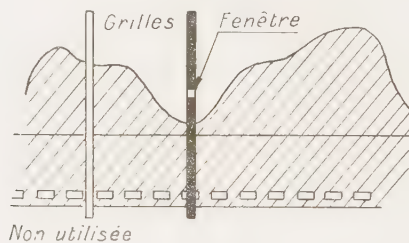


Fig. 60

uniquement limité par les temps de réponses des appareils électroniques et du numérateur P.T.T. On peut admettre dix points par seconde facilement, ce qui fait, pour des points distants d'au moins 5 mm, 5 cm/s, soit 40 s pour calculer l'ensemble des probabilités $p(0, \tau)$ $p(1, \tau)$... $p(n, \tau)$ où τ est fixé. L'avantage de cette méthode est que l'on peut défiler à vitesse variable.

Si l'échelle des temps n'est pas linéaire, une correction à main (ou automatique) permet de corriger l'intervalle τ , initialement choisi de façon que la longueur de film, entre les deux grilles, représente toujours τ secondes;

2° *autre méthode*, particulièrement intéressante lorsque l'échelle de temps est linéaire, la méthode la plus simple, dans ce cas, est alors de mesurer la longueur de film, c'est-à-dire l'intervalle τ que l'on trouve nécessaire pour avoir n zéros. On dispose alors l'une des grilles en lectrice de « zéro », l'autre en lectrice de longueur, c'est-à-dire en totalisatrice de perforations.

L'enregistrement total est divisé en échantillons correspondant à une longueur $\tau_{\max}$ chacun. Pour chaque échantillon, on fait défiler le film à partir de l'origine de l'échantillon; lorsque le zéro est décalé, une impulsion de lecture est envoyée sur la décade totalisatrice des longueurs (connectée à la grille lectrice des perforations). Le nombre lu peut être envoyé sur les roues imprimantes. Les divers nombres imprimés correspondent,

pour chaque échantillon, aux longueurs τ qui ont été nécessaires pour trouver 1, 2, n zéros. Après analyse d'un certain nombre d'échantillons, on passe aux fréquences que l'on assimile aux probabilités;

3° *une troisième méthode*, entièrement automatique, consiste à déclencher systématiquement la lecture de la décade « longueurs », lorsque la décade « zéros » a compté n zéros. Si l'on se contente de cent intervalles pour τ (chaque intervalle vaut $\tau_{\max}$), on peut alors envoyer la lecture de la décade longueur dans l'un des cent numérateurs, on a directement la loi $p(n, \tau)$ où n est fixe.

GÉNÉRATEUR DE BRUIT.

L'appareil comprend, en dehors des sources de tensions classiques, un générateur de bruit présentant un spectre sensiblement uniforme dans la bande 0 — 100 Hz d'une puissance moyenne de 25 W.

Ce signal correspondant à une fonction aléatoire particulière, permet l'étude de la réponse d'un système, linéaire ou non, à une fonction aléatoire.

On peut également, par un jeu de connexions, prélever des *échantillons* sur le générateur de bruit (tensions) à l'aide de la base de temps et des décades électroniques. Ces échantillons (impulsions) ont une amplitude aléatoire qui suit une loi de Gauss. Il est alors classique de produire, à partir de ces impulsions, un bruit dont le spectre ou la fonction d'autocorrélation est donné *a priori*. L'appareil devient donc un générateur de fonction aléatoire dont le spectre est donné. Il permet la simulation des bruits qui entrent dans les systèmes asservis et, par suite, d'étudier les systèmes asservis au laboratoire.

Un bruit à spectre uniforme correspond à une fonction d'autocorrélation réduite à une fonction de Dirac à l'origine ($\tau = 0$). On peut donc, à partir du *même* générateur de bruit, déduire des fonctions aléatoires sans corrélation mutuelle (indépendantes).

DONNÉES EXTERNES

ÉTUDE DE LA TURBULENCE ATMOSPHÉRIQUE

Ce chapitre n'entend pas étudier, même partiellement, cette importante question (1); son but est de montrer que les calculs et méthodes exposés jusqu'ici ne sont pas vains. S'il n'existe pas de données statistiques (spectre) utilisables dès maintenant, ce qui est le cas pour la turbulence atmosphérique, on peut mettre en œuvre des méthodes permettant de les obtenir. La méthode proposée ci-dessous a été effectivement expérimentée et des résultats ont été obtenus. Nous nous proposons, dans l'avenir, de compléter et de perfectionner cette méthode.

5.1 PERTURBATIONS AUXQUELLES LES AÉRODYNES SONT SOUMIS

L'objectif principal de ce travail est la détermination des réseaux correcteurs de pilotes automatiques d'avions et d'engins guidés : c'est pourquoi ce dernier chapitre, consacré à la détermination des données externes, ne traite que le cas des perturbations atmosphériques. Il va de soi qu'une étude parallèle pourrait être faite concernant l'étude des perturbations d'un système quelconque. Il serait bon de s'assurer, avant d'entreprendre une détermination expérimentale des propriétés statistiques de ces perturbations, que celles-ci ne sont pas régies par des lois statistiques susceptibles d'être déterminées *a priori*.

5.1.1 Perturbations d'origines non-atmosphériques.

Pour des engins propulsés par fusées à poudre ou à liquide, les irrégularités de combustion conduisent à des variations en grandeur et en direction de la poussée. Ces irrégularités peuvent être représentées par une fonction aléatoire : la stationnarité du phénomène, pour un même type de fusée, serait à vérifier expérimentalement au banc. De telles mesures ne présentent pas de difficulté, hors le fait qu'elles sont coûteuses.

Pour les aérodynes propulsés par moteurs à pistons ou par réacteur, les irrégularités de combustion ont des conséquences moins importantes : l'inertie des parties en

(1) L'importance de cette question n'est pas encore généralement admise.

mouvement joue, en quelque sorte, le rôle de filtre pour ces perturbations à fréquence relativement grande. Il est à noter d'ailleurs que, dans ces deux derniers types de propulseurs, la puissance ou le couple contrôlé est considérablement moins grand que dans les fusées. Les pompes d'injections notamment ont des aspects totalement différents dans les deux cas.

Une autre cause de perturbation, relativement importante, est due aux décollements aérodynamiques qui se produisent sur les voilures ou le fuselage. Le point de transition, sur un profil, n'est pas fixe (par rapport à la voilure), pour des conditions expérimentales apparemment identiques. Ce point se déplace sur un segment d'une façon aléatoire. L'étude de ces perturbations est en cours (procédés acoustiques) dans plusieurs laboratoires.

Enfin, il existe encore bien des causes de perturbations. Elles sont d'importance secondaire par rapport aux précédentes : on peut signaler en particulier le mouvement des liquides dans les réservoirs.

5.1.2 Perturbations atmosphériques.

Ces perturbations sont mises en évidence, de façon certaine, par les mouvements d'un planeur, certains jours, en certains lieux (pas d'irrégularité de combustion, pas de réservoir : le planeur est véritablement un solide indéformable lorsque les gouvernes sont bloquées).

Les zones turbulentes sont souvent prévisibles d'après l'aspect du ciel ou d'après les relevés de pression et de température; cependant on peut rencontrer des zones turbulentes par temps clair, sans avoir aucun indice de leur présence. Les causes de formation de la turbulence sont nombreuses, nous ne reviendrons pas sur ce sujet [10]. L'étude théorique de la turbulence [11] est également difficile vu les échelles des volumes et des temps mis en jeux.

Les mesures expérimentales sont également difficiles pour les mêmes raisons.

Le problème à résoudre est le suivant :

— détermination du champ des vitesses d'agitation de l'air que l'aérodyne a rencontré durant son vol, s'il s'agit d'une exploitation de résultats, ou doit rencontrer, s'il s'agit d'une adaptation de pilote automatique.

Pour le premier cas, il est difficile d'utiliser l'aérodyne comme moyen de mesure, puisque lui-même subit l'action de ces rafales et tend à les corriger. Si aucune *autre* perturbation n'agissait sur lui, on pourrait déduire de ces mouvements les caractéristiques de la grandeur excitatrice. Cette méthode a été utilisée, nous y reviendrons au paragraphe 5.3.1.

Elle ne peut pas être très précise, en particulier à cause du fait que l'assiette de l'aérodyne risque de devenir rapidement inacceptable si les perturbations ont une composante continue ou à basse fréquence ⁽¹⁾ : elles se traduisent alors par une dérive.

Le second cas, adaptation de pilote automatique, suppose l'hypothèse selon laquelle ces perturbations constituent une fonction *aléatoire stationnaire*, c'est-à-dire

(1) En particulier l'oscillation phygoïde de l'aérodyne vient se mélanger au phénomène observé.

que plusieurs épreuves (enregistrements) de ces perturbations doivent satisfaire aux mêmes lois statistiques. Nous nous limitons au second ordre (énergie) donc, en particulier, la fonction d'autocorrélation doit être la même pour ces épreuves. Ces épreuves peuvent provenir soit d'enregistrements simultanés en des lieux voisins, soit d'enregistrements pris à des époques différentes (stationnarité).

Nous définirons l'espace dans lequel, et l'intervalle de temps pendant lequel on peut considérer les perturbations comme pouvant être représentées par une fonction aléatoire d'après cette condition de stationnarité.

Soit $f_{ij}(t)$ une épreuve faite au lieu i à l'instant de référence j ; on peut, dans le plan i, j définir un domaine dans lequel les fonctions $f_{ij}(t)$ sont des épreuves d'une même fonction aléatoire. Dans ce domaine (espace-temps), les perturbations constituent un phénomène aléatoire stationnaire dont les propriétés statistiques (fonction d'autocorrélation) peuvent être déterminées par l'une quelconque des épreuves $f_{ij}(t)$ supposée suffisamment longue pour que l'équilibre statistique soit atteint.

Cette stationnarité dans l'espace et dans le temps peut s'étudier par répétition systématique des mesures.

L'énergie du choc (accélération brusque), dû à une rafale, ne provient pas de l'énergie cinétique de la rafale : celle-ci modifie brusquement la valeur de l'incidence sur la voilure, directement, d'une part, par action sur l'empennage, d'autre part, dont la variation brusque de portance provoque une variation d'incidence qui tend à diminuer l'influence de la première phase. On trouve, par exemple, pour un engin autopiloté, sous l'action d'une rafale de 1 m/s, perpendiculaire à sa route, une accélération de 1,4 m/s², pendant 0,012 s puis brutalement, à cet instant, l'accélération devient égale à 0,88 m/s² et diminue jusqu'à s'annuler (après 0,5 s, on trouve 0,09 m/s²).

5,1.3 Spectre des rafales.

Sous réserve que la stationnarité dans le temps et dans l'espace — au moins pour un certain domaine — soit vérifiée, la détermination du spectre énergétique [12], transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation des vitesses de rafales, suffira pour le calcul des pilotes automatiques.

Plus précisément, le schéma que nous avons représenté au paragraphe 2,2 correspond en général à la stabilisation soit en roulis, soit en tangage; il est, en effet, souvent possible de dissocier les deux fonctions de transfert (les couplages entre les deux axes interviennent peu). Supposons qu'il s'agisse, par exemple, d'une stabilisation en tangage.

On peut vérifier rapidement que la direction de la rafale intervient dans l'accélération résultante, partant de l'expression de la portance :

$$(5,1) \quad P = \frac{1}{2} \rho S C_z V^2,$$

ρ , S , C_z , V étant la densité, la surface de référence de la voilure, le coefficient de portance, la vitesse.

Pour une rafale longitudinale on a :

$$(5,2) \quad \frac{dP}{P} = 2 \frac{dV}{V} - 2 \frac{dv}{V},$$

où dV représente précisément v , vitesse de la rafale.

Pour une rafale normale :

$$\frac{dP}{P} = 2 \frac{dV}{V} + \frac{dC_z}{C_z},$$

ici :

$$dV = V - \sqrt{V^2 + v^2} = v - \frac{1}{2} \left(\frac{v}{V} \right)^2.$$

$\frac{dC_z}{C_z}$, dans la partie rectiligne du C_z : $C_z = ki$ est égal à $\frac{di}{i}$ lui-même équivalent à $\frac{dv}{V}$, donc :

$$(5,3) \quad \frac{dP}{P} = \left(\frac{v}{V} \right)^2 + \frac{v}{V}.$$

Pour les avions rapides $V \geq 200$ m/s, il est possible de négliger $\left(\frac{v}{V} \right)^2$ devant $\left(\frac{v}{V} \right)$. Les expressions (5,2) et (5,3) diffèrent par un coefficient 2.

En admettant que les rafales rencontrées intéressent un volume supérieur à l'envergure de l'aérodyne, on voit que les couples perturbateurs à introduire, moments de ces variations de portance par rapport à l'axe de tangage, sont fonctions de la *grandeur* et de la *direction* des rafales. Le spectre énergétique doit être le spectre correspondant à ces deux quantités.

Cependant, un ordre de grandeur des perturbations pourra être fourni par l'étude des *modules* des vitesses de rafales v . A partir de ce spectre et de données relatives à l'isotropie des rafales, il est possible de reconstituer un « champ de vitesses » de rafales correspondant aux mêmes propriétés statistiques que dans la réalité.

5,1.4 Remarques concernant les simulateurs.

Il va de soi qu'il est indispensable d'essayer de tracer un tel champ de vitesses, soit graphiquement, soit par le calcul. Seule l'utilisation de ces résultats dans une machine à calculer électronique, de préférence analogique, permet de reconstituer ou d'étudier le fonctionnement du pilote automatique.

Le spectre énergétique étant calculé, il est simple, à l'aide d'un générateur de bruit tel que celui qui a été décrit à la fin du chapitre IV et d'un filtre dont la fonction de transfert correspond au spectre, de reconstituer la fonction aléatoire cherchée; la sortie de ce filtre correspond à une *épreuve* de cette fonction aléatoire. Cette épreuve et les épreuves que l'on peut obtenir par enregistrement des modules des vitesses de vent ont les mêmes propriétés statistiques et correspondent à la même fonction aléatoire.

Un simulateur, machine à calculer électronique où les équations de la mécanique du vol sont affichées et où, en général, le pilote automatique est le pilote réel, permet l'étude et l'adaptation du pilote automatique. Une telle machine, sans organe de simulation de rafales (générateur de fonction aléatoire à spectre connu), ne présente qu'un intérêt restreint. En effet, les aérodynes ont rarement des fréquences propres rapides (1)

(1) Un aérodyne possède, en général, deux fréquences propres bien en évidence : l'une rapide, celle que nous considérons ici; l'autre lente, appelé phygoïde.

supérieures à 3 Hz ⁽¹⁾. Sous l'effet d'une perturbation, l'aérodynne accuse une réponse *forcée*, très brève, puis oscille, en s'amortissant sur sa fréquence propre. Les détecteurs de mouvement (gyroscopes, gyromètres, etc.) envoient des signaux correspondants à leur réponse propre sous l'effet de ces mouvements.

Comme nous l'avons déjà remarqué (chap. IV), ces détecteurs correspondant à des transmetteurs d'énergie à faible niveau, ont une fréquence propre supérieure à celle de l'aérodynne (en général, rarement inférieure à 7 Hz). On peut même supposer que leur réponse est en phase avec le mouvement pour la fréquence propre de l'aérodynne (3 Hz). Par contre, pendant le mouvement forcé de l'aérodynne, des fréquences bien supérieures à 3 ou 7 Hz, peuvent apparaître : la réponse du détecteur n'est plus en phase avec le mouvement et le signal de sortie du détecteur dépend directement de la perturbation excitatrice de l'aérodynne. A l'extrême limite, une excitation en impulsion (impulsion de Dirac) a un spectre uniforme où toutes les fréquences apparaissent avec la même énergie.

La réponse forcée de l'aérodynne est donc très importante, puisqu'elle conduit à des signaux différents dès la sortie du détecteur. Il est fondamental de la provoquer, dans ces conditions aussi « comparables » que possible avec la réalité dans tout simulateur de vol ⁽²⁾ : le générateur de fonction aléatoire à spectre donné est le procédé le plus proche de la réalité.

5.2 ÉCHELLES DES LONGUEURS ET DES TEMPS DE LA TURBULENCE

5.2.1 Problème.

Avant de parler de spectre énergétique, il y a lieu de préciser l'échelle à laquelle on se place pour les longueurs et pour le temps. Il est intuitif de décomposer l'atmosphère en couches de vent de direction et vitesses données. Prenons le cas d'un engin autopiloté s'élevant verticalement. A grande échelle, on peut considérer que chacune de ces couches a une épaisseur de quelques centaines de mètres. A l'intérieur de chacune de ces tranches, la vitesse du vent est supposée constante et la perturbation introduite se réduit à une constante : d'une part, le phénomène n'est pas stationnaire et, d'autre part, ces perturbations se traduisent par une composante continue dans le spectre. Le temps qui s'écoule entre la rencontre de deux surfaces de séparation est de l'ordre de la seconde ou de la dizaine de seconde, temps toujours très supérieur à la constante de temps du pilote automatique.

Par contre, la surface de séparation schématique que nous avons considérée correspond, en réalité, à une tranche intermédiaire où la turbulence est très forte. Des tourbillons de rayon égal à 10 m conduisent à des perturbations susceptibles d'être décelées par l'engin, puisque, pour une vitesse de 400 m/s, l'engin coupera le tourbillon

(1) Chasseurs, engins guidés.

(2) De plus, les hautes fréquences continues dans le mouvement forcé sont souvent « redressées » dans le détecteur ou dans les organes suivants, par suite de non-linéarité (jeux, saturation, etc.). Il en résulte une dérive du détecteur lui-même (lorsqu'il est bouclé) ou des organes suivants.

en deux instants distants de 25 ms. Ce temps est de l'ordre de grandeur de la constante de temps du pilote automatique. D'autre part, un rayon de 10 m correspond à l'ordre de grandeur des dimensions de l'engin : celui-ci est donc susceptible de recevoir ses perturbations d'une façon dissymétrique.

En particulier, si l'engin, ou l'avion, vole horizontalement à altitude imposée, il peut se trouver durant un temps appréciable dans une telle zone turbulente.

La détermination des caractères statistiques permanents de la turbulence de telles zones est l'objet de cette étude.

Nous devons cependant noter que les effets de cette turbulence dépendront de la vitesse du mobile qui la traverse. En dehors des considérations d'échelle de longueur ou de temps, en variable d'Euler, on serait amené à considérer une fonction aléatoire dépendant de l'espace et du temps pour caractériser statistiquement ces perturbations. En particulier, il faudrait considérer les corrélations d'espace et de temps qui n'ont pas de raison d'être identiques.

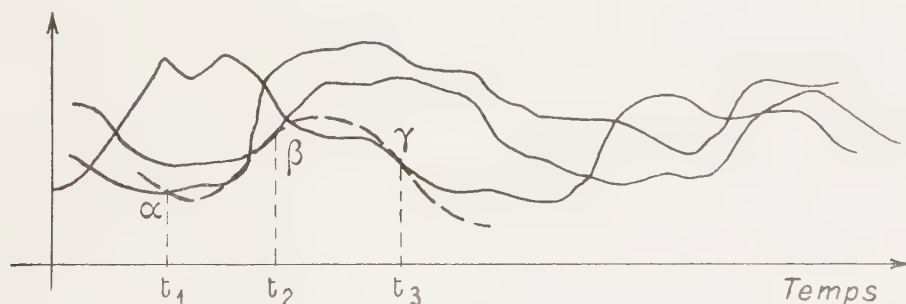


Fig. 61

Du point de vue expérimental, on pourrait imaginer qu'on enregistre en une série de lieux A, B, C, ..., M, simultanément les vitesses totales du vent (*fig. 61*).

Compte tenu de la vitesse du mobile on peut, à partir de ces enregistrements, avoir une épreuve de la fonction aléatoire représentant les *perturbations agissant sur le mobile*.

Il va de soi que cette méthode rigoureuse, théoriquement, est pratiquement irréalisable à cause, d'une part, du nombre considérable de détecteurs qu'elle nécessiterait et, d'autre part, du travail, difficilement imaginable, de dépouillement. Il faut, au prix d'une précision moins grande, faire des hypothèses simplificatrices.

Une hypothèse souvent admise est que les corrélations d'espace et de temps sont équivalentes : si V est la vitesse du mobile ⁽¹⁾, l'argument λ des fonctions de corrélation d'espace doit être remplacé par $V = \lambda \tau$ dans les corrélations de temps. La simplification est considérable, puisqu'elle ramène la fonction aléatoire à deux variables et une fonction aléatoire à une variable seulement, mais l'hypothèse doit être vérifiée. Nous reviendrons sur ce point aux paragraphes 5,2.3 et 5,4.3.

(1) Ou du vent moyen.

5,2.2 Échelle des longueurs.

On utilise couramment soit les variables de Lagrange, soit les variables d'Euler.

Les premières sont définies à partir d'une transformation finie :

$$(5,4) \quad x = q + \xi, \quad y = b + \eta, \quad z = c + \zeta,$$

où $P_0(a, b, c)$ est la position à l'instant t_0 de l'élément de matière, qui est en $P(x, y, z)$ à l'instant t . Soient u, v, w les composantes de la vitesse W de l'élément de matière. On passe de la position de l'élément à l'instant t , à sa position à l'instant $t + dt$ par la transformation infiniment petite $W dt$. On peut étudier le mouvement en exprimant ξ, η, ζ , donc x, y, z en fonction de a, b, c, t .

Les variables d'Euler sont relatives au champ de vitesse W à l'instant t : u, v, w .

À chaque instant, u, v, w sont des fonctions de x, y, z . Les trajectoires d'un élément matériel s'expriment par :

$$(5,5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = u(x, y, z, t); \\ \frac{dy}{dt} = v(x, y, z, t); \\ \frac{dz}{dt} = w(x, y, z, t); \end{array} \right.$$

une classe importante de mouvements de fluide est celle des mouvements définis par un champ de vitesse (5,5) indépendant du temps : ce sont les mouvements permanents ou stationnaires.

Revenons aux variables de Lagrange, elles définissent la position ou la vitesse d'un « élément » de matière. Pour un fluide, cet élément ne peut être limité que par une surface fictive, puisqu'il s'agit d'un milieu continu (à moins qu'on se place à l'échelle moléculaire).

En physique macroscopique, on considérera un petit volume initial dv du fluide enfermant une masse dm et on admettra qu'il restera localisé dans l'ensemble du fluide aux instants ultérieurs. On peut alors parler de la position et de la vitesse de cet élément fluide. Le fait d'assimiler ce petit volume à un point, fixe l'échelle des longueurs. Les mouvements des éléments de volume que l'on pourrait déterminer à l'intérieur de l'élément considéré, sont alors sans intérêt, bien qu'existant nécessairement et bien que les vitesses que l'on serait susceptible de déterminer puissent être beaucoup plus grandes que celles de l'élément dv considéré initialement.

Nous admettrons, dans la suite que l'on a affaire à des phénomènes *continus* et, qu'en particulier, les vitesses infinies, permises par la loi de répartition des vitesses de Maxwell, n'apparaissent pas lorsqu'on considère un petit élément dv . Les fonctions que nous rencontrerons seront donc à variations bornées.

Supposons donc, qu'en un point fixe par rapport au sol on enregistre, en fonction du temps, les trois composantes v_1, v_2, v_3 (variables d'Euler) du vecteur V , vitesse du

vent avec un détecteur parfait (fonction de transfert identique à 1). Sauf cas exceptionnel, on pourra déduire par changement d'axes trois autres composantes u_1, u_2, u_3 telles que :

$$(5,6) \quad \frac{1}{T} \int_0^T u_1 dt = V_1;$$

$$(5,7) \quad \frac{1}{T} \int_0^T u_2 dt \quad \text{et} \quad \int_0^T u_3 dt \leq \varepsilon;$$

T est le temps pendant lequel on a enregistré le phénomène, ε est une quantité petite dont on va préciser l'ordre de grandeur.

On constate expérimentalement que, au delà d'une certaine valeur T , la valeur V_1 reste pratiquement constante, et que les inégalités (5,7) sont d'autant mieux satisfaites. Dans ces conditions, on appelle :

V_1 : vitesse moyenne du vent;

$u_1 - V_1, u_2, u_3$: vitesses instantanées d'agitation.

La turbulence est dite *homogène* au voisinage de deux points A et A' , si les scalaires (1) :

$$(5,8) \quad R_{\alpha\beta}(A, A') = \overline{u_\alpha(A) u_\beta(A')}$$

ne dépendent pas isolément de A ou A' , mais uniquement du vecteur AA' .

La turbulence homogène est dite *isotrope*, si le tenseur formé à partir des $R_{\alpha\beta}(A, A')$ est invariant pour toute rotation d'axes.

De toute façon, nous supposons la stationnarité : les scalaires $R_{\alpha\beta}(A, A')$ ne dépendent pas du temps.

L'échelle des longueurs est théoriquement définie, nous reviendrons sur sa définition, lorsque nous aurons défini l'échelle des temps, en considérant l'appareil détecteur.

5.2.3 Échelle des temps.

Nous partons d'un enregistrement, une épreuve, de l'une des fonctions $V - u_1, u_2, u_3$; soit $f(t)$ la fonction aléatoire représentant le phénomène, appelons : $f_T(t)$ l'épreuve, correspondant à une durée d'enregistrement finie $2T$ de l'une des composantes de la vitesse d'agitation.

Les hypothèses sur $f_T(t)$ sont les suivantes :

$$(5,9) \quad f_T(t) = \begin{cases} f(T) & \text{si } -T < t < T, \\ 0, & \text{pour les autres valeurs;} \end{cases}$$

$$(5,10) \quad \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f_T(t) dt \simeq 0;$$

$$(5,11) \quad \text{énergie : } \int_{-T}^{+T} f_T^2(t) dt \quad \text{reste finie;}$$

(1) Composantes du tenseur de turbulence.

nous supposons de plus que :

$$(5,12) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f_T(t) \cdot f_T(t + \tau) \cdot dt$$

est uniformément convergente quel que soit τ .

Soit $E(\theta)$ la valeur de l'intégrale (5,11), calculée sur un intervalle 2θ :

$$(5,13) \quad E(\theta) = \frac{1}{2\theta} \int_{-\theta}^{+\theta} f^2(t) dt.$$

En vertu de l'hypothèse (5,12), $E(\theta)$ tend vers une constante E_0 , lorsque θ tend vers l'infini, soit :

$$(5,14) \quad \varepsilon(\theta) = |E(\theta) - E_0|.$$

L'ordre de grandeur fixant la *durée* des enregistrements est déterminée par les fluctuations d'énergie que l'on admet. Si l'on tolère des fluctuations de 1 %, θ est déterminé par (5,14) :

$$(5,15) \quad \varepsilon(\theta) = \frac{E_0}{100}.$$

Ce temps θ correspond à la structure *fine* de la turbulence, puisque l'on a supposé que la fonction $f_T(t)$ correspondait aux vitesses en *un point* (variables d'Euler).

On peut imaginer de passer de cette structure fine, à une structure macroscopique, définie par l'échelle de longueur fixée au paragraphe 5,2.2. Il faut cependant remarquer que cette méthode est très peu précise : les « dérivées lentes » et même les composantes à basses fréquences risquent d'être très mal conservées dans une telle opération. D'autre part, il serait nécessaire de disposer d'un grand nombre de détecteurs dans l'élément de volume dv (variables de Lagrange) et l'interaction de ces détecteurs ne peut être négligeable.

Deux méthodes correspondant d'ailleurs à deux versions expérimentales complètement différentes (§ 5,4) permettent de lever cette difficulté :

— l'une consiste en l'utilisation d'un détecteur intégrant directement les effets de rafales sur toute sa surface et délivrant un signal fonction de l'intégrale. Le champ des vitesses est évidemment localement perturbé par la surface ou le volume d'un tel détecteur : l'échelle des longueurs est sensiblement plus grande que les dimensions de cet organe. Cette version correspond aux premiers essais que nous avons faits et qui seront décrits aux paragraphes 5,4.1 et 5,4.2;

— l'autre consiste en l'utilisation de détecteurs ponctuels, placés à une distance de l'ordre de grandeur de l'échelle des longueurs choisie. L'étude de la corrélation entre les signaux de ces détecteurs permet de savoir si l'extrapolation de la structure fine à l'espace macroscopique choisi est valable. Cette version correspond à la méthode que nous avons finalement adoptée et exploitée.

La classification donnée par M. R. BOUQUET [10] au Colloque International de Mécanique de Poitiers (1950) permet de situer notre étude dans la classe qu'il a appelé « Échelle de l'aérologie ».

Échelle du globe terrestre.....	Circulation générale de l'atmosphère.
Échelle de la météorologie synoptique	Tourbillons cycloniques de quelques centaines de kilomètres de diamètre (mouvements turbulents).
Échelle de l'Aérologie	Tourbillons de quelques mètres à quelques hectomètres de diamètre (mouvements turbulents).
Échelle de la soufflerie.....	Tourbillons de quelques millimètres à quelques décimètres de diamètre (mouvements turbulents).
Échelle capillaire	Mouvements laminaires vérifiant les équations de Navier.
Échelle moléculaire	Mouvements moléculaires de la théorie cinétique.

Nous pouvons compléter ce tableau en y incorporant les échelles des fréquences. Les différents appareils existants permettant de faire les mesures dans le domaine de l'aérologie sont portés dans la figure 62.

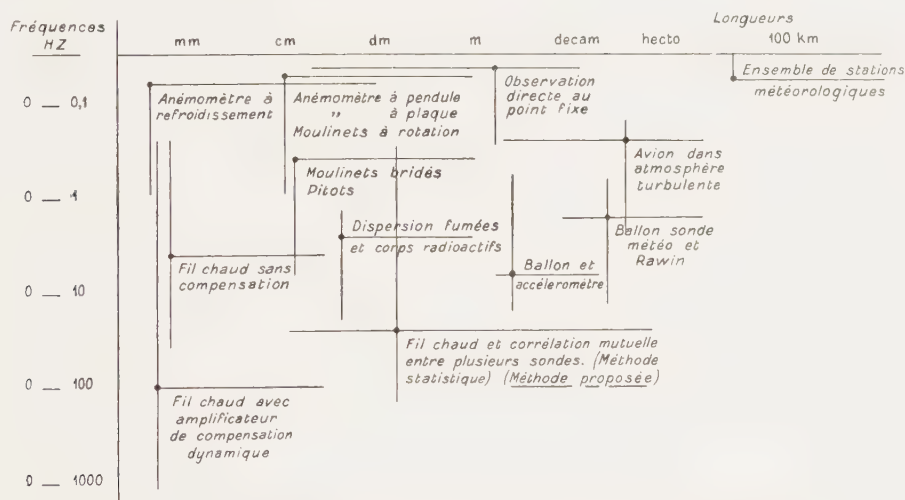


Fig. 62. — Situation de la méthode proposée dans les échelles d'espace et de temps

5,3

PRINCIPE DE LA MÉTHODE PROPOSÉE

5,3.1 État actuel de la question.

A notre connaissance, il n'existe pas de mesures systématiques de spectre de la turbulence tel que nous l'avons défini. Les sondages météorologiques par ballons-sondes définissent les directions et intensités des couches de vent et parfois d'autres renseignements tels que température, degré hygrométrique.

Ces renseignements correspondent à des données considérées comme sûres et non pas statistiques. Elles sont valables localement et temporairement, mais l'intrapolation dans l'espace et l'extrapolation dans le temps sont facilitées par le nombre relativement grand de sondages. La nécessité de tels renseignements, pour les vols à grande distance, est incontestable.

Par contre, pour le problème qu'on a en vue, ces sondages ne permettent pas de définir la turbulence. D'une part, l'échelle des longueurs est beaucoup trop grande, d'autre part, l'exploration de l'atmosphère par sondage météo (RAWIN) conduit à une précision relative décroissante ⁽¹⁾ avec le temps.

Un aérodyne devant voler à 8 000 m, par exemple, nécessite cependant la connaissance de la turbulence dans une bande de quelques centaines de mètres, au voisinage de cette altitude, avec la même *précision absolue* que s'il devait voler à 4 000 m. Une autre méthode doit donc être envisagée.

En Angleterre, une localisation systématique des zones turbulentes a été entreprise il y a quelques années [15], ce problème est différent du nôtre. Une zone turbulente était définie comme conduisant à des accélérations du centre de gravité supérieures à $\pm 0,2$ g.

Les conclusions qui nous intéressent directement sont relatives, d'une part, à l'intensité maximum des rafales à l'*intérieur* ou *sous* les cumulo-nimbus et, d'autre part, à la présence possible de rafales de 10 m/s, en haute altitude.

En France, une étude ayant pour base l'exploration de l'atmosphère par un avion volant, gouvernes bloquées, a été entreprise par l'O.N.E.R.A. et la S.F.E.N.A. L'exploitation de ces résultats, ainsi que nous allons le voir, est très délicate.

5.3.2 Critique des méthodes actuellement utilisées.

Les sondages météo et la méthode de Hislop ne correspondent pas au même problème.

Par contre, la méthode de l'avion nous paraît très délicate à exploiter pour les raisons suivantes :

— la grandeur généralement enregistrée est une composante de l'accélération de l'avion, généralement la composante normale. Pour que les résultats soient exploitables, il est nécessaire qu'on puisse définir une fonction de transfert, liant l'accélération normale γ_N de l'avion à une grandeur quelconque liée aux rafales. Il semble souhaitable de considérer la composante verticale des rafales ou leur module v :

$$(5,16) \quad v = G(\omega) \gamma_N;$$

connaissant le spectre de γ_N , on en déduira le spectre des v par la relation déjà signalée :

$$(5,17) \quad \Phi_{vv}(\omega) = |G(\omega)|^2 \Phi_{\gamma\gamma}(\omega).$$

(1) Questions de distance, d'indice de réfraction, de site du ballon (trop bas sur l'horizon), etc.

Mais la relation (5,16) suppose, d'une part, la linéarité; d'autre part, que d'autres paramètres n'interviennent pas d'une façon importante dans cette relation. En particulier, le spectre des vibrations de la cellule de l'avion doit être nettement différent du spectre des accélérations dues aux rafales. Ceci implique que la corrélation mutuelle, entre une fonction caractérisant les vibrations et les vitesses de rafales, par exemple, soit négligeable par rapport à la fonction d'autocorrélation de l'une ou de l'autre de ces grandeurs. Cette hypothèse semble difficilement vérifiée.

D'autre part, si l'expérience se fait gouvernées bloquées, il est probable qu'après quelques dizaines de secondes l'assiette de l'avion devienne inacceptable et, en tous cas, que la fonction de transfert $G(\omega)$ ne soit plus valable. On notera d'ailleurs que, si l'expérience dure quelques dizaines de minutes, il est nécessaire de tenir compte de la variation de centrage de l'avion due à la perte de poids.

Si l'expérience est faite avec un pilote automatique, il y a lieu d'introduire la fonction de transfert de celui-ci, qui est rarement assimilable à un système linéaire, d'ou complexité d'exploitation.

Enfin, on notera, qu'indépendamment de toutes ces considérations, l'heure de vol est chère. Dans cet ordre d'idées, il est bien évident que la méthode la plus accessible est celle de l'étude du vent au point fixe — surtout si l'on se contente de faibles altitudes — par ballon captif, dans les autres cas : des précautions doivent alors être prises pour tenir compte des mouvements absolus du ballon ou du détecteur par rapport au sol. Cette méthode, cependant, est peu précise. Les vitesses d'agitations sont noyées dans une composante continue, en général, beaucoup plus importante, qui tend à saturer les détecteurs. Si l'on emploie une méthode de zéro, les composantes à très basses fréquences (variation même très faible du « vent moyen ») conduisent à une dérive qui, en outre, détruit généralement la linéarité du phénomène.

5,3.3 Méthode suggérée.

Elle consiste à s'affranchir du « vent moyen » que nous définirons plus loin, et à mesurer, par rapport à ce vent, les vitesses d'agitation, c'est en somme une méthode de zéro à recalage automatique.

Précisons d'abord que ce que l'on entend par « vent moyen ». Le champ des vitesses d'agitations n'est pas permanent, il s'étend dans le temps et dans l'espace. On peut considérer les corrélations entre les vitesses d'agitation, soit au même instant en deux points (corrélation dans l'espace), soit au même point en des instants différents (corrélation dans le temps). Cependant, dans un but de simplification, on admet souvent que l'on peut passer de l'une à l'autre en transformant les longueurs en temps par la relation $l = Vt$, où V est la vitesse moyenne de l'air.

L'échelle de temps que nous avons définie est indépendante de la vitesse du mobile qui parcourt la zone turbulente, elle est intrinsèque à la turbulence.

L'aérodynne possède une fréquence lente d'oscillation phygoïde ⁽¹⁾, en général, de plusieurs secondes ou plusieurs dizaines de secondes. Cette oscillation se manifeste

(1) Voir 5,1.4.

même en air calme. Il est souhaitable que le vent moyen corresponde à une moyenne calculée sur plusieurs périodes de cette phygoïde; autrement dit, nous définirons le vent moyen comme un vent qui peut comporter des fluctuations à fréquence non supérieure à 0,01 Hz.

Revenons maintenant au problème tel qu'il a été posé au paragraphe 5,2.1.

La méthode suggérée, méthode du ballon libre ⁽¹⁾, conduit à mesurer la turbulence intrinsèque de la portion d'atmosphère étudiée, puisqu'on obtient directement les vitesses d'agitation. Si nous admettons l'hypothèse de l'équivalence des corrélations dans le temps et dans l'espace avec la correspondance :

$$\lambda_z = V \tau,$$

on peut en déduire le spectre de la turbulence intrinsèque et l'introduire dans le pilote automatique comme spectre des perturbations (résultats donnés au 5,6). Ce résultat sera d'autant plus proche de la réalité que la corrélation mutuelle spatiale entre les rafales sera faible. La même méthode permet de mesurer cette corrélation mutuelle.

Un ballon sphérique est équipé de façon à voler à altitude barométrique constante : il atteint son altitude d'équilibre et dérive avec le vent. On mesure les mouvements fins de l'atmosphère par leurs effets, soit sur le ballon, soit sur des détecteurs liés au ballon. La vitesse moyenne du ballon (donc du vent), bien que n'intervenant pas, peut être mesurée, soit par théodolite, ou cinéthéodolite, soit par photographie du sol à partir du ballon.

Différentes versions ont été essayées : le principe des mesures des deux premières versions était totalement différent de la troisième version. Nous allons reprendre en détail le but de chacune de ces versions, mais, auparavant, donnons quelques détails généraux.

5.3.4 Généralités concernant les essais effectués ⁽²⁾.

Nous désignons un essai par son numéro d'ordre, le tableau ci-après (pp. 126, 127, 128) permet l'identification de l'essai.

Nous avons d'abord étudié le problème du ballon flottant à altitude constante. En principe, un ballon constitué simplement par une vessie sans enveloppe devrait être en équilibre indifférent à toute altitude, s'il a été équilibré au sol. Les trois premiers essais ont cependant montré qu'un tel ballon, une fois remorqué ⁽³⁾ et largué à 1 000 m environ, dérivait verticalement avec une vitesse ascensionnelle ou descensionnelle pouvant atteindre 2 à 3 m/s. De plus, par suite de la porosité de la vessie, après une dizaine de minutes, la vitesse devenait toujours descensionnelle et voisine de 4 à 5 m/s.

(1) Les mesures de vitesse d'agitation, par rapport au vent moyen, s'effectuent à partir d'un ballon libre comme nous le verrons plus loin.

(2) Essais effectués grâce à l'autorisation du S.T.Aé, qui a pris à sa charge les frais de réalisation du matériel.

(3) Remorquage effectué par un autre ballon. Séparation par coupure de la corde reliant les deux ballons (cordon Bickfort et fil de nylon).

Dès lors, nous avons toujours utilisé par la suite un ballon constitué par une vessie ⁽¹⁾ et une enveloppe de tissu (acétate-nylon). Ce système étant à masse et volume constants doit flotter à altitude moyenne constante. En fait, nous avons constaté, lors de l'essai n° 4, un palier au voisinage de 1 500 m, avec une perte d'altitude inférieure à 160 m en 9 mn (29 cm/s). L'altitude d'équilibre peut être choisie arbitrairement par la force ascensionnelle qu'on donne au sol. Dans les derniers essais (n°s 15 et 16), on a au contraire choisi un palier d'équilibre relativement haut 2 000 m et effectué les mesures pendant la montée à faible vitesse ascensionnelle, pour des raisons qui seront indiquées plus loin.

Enfin, dès l'essai n° 4, le dispositif de récupération du matériel consistait à arracher la soupape de la vessie par une minuterie et à suspendre le matériel de façon que l'enveloppe forme parachute, une fois la vessie dégonflée; les vitesses descensionnelles ont toujours été inférieures à 6 m/s ⁽²⁾.

Le ballon était poursuivi par un véhicule et, en général, suivi au théodolite dès son départ les jours clairs. Des sondages avant le lâcher permettait de localiser le point de chute probable. Tous ces essais ont été effectués avec un personnel très restreint : en général trois personnes ⁽³⁾, chaque essai, préparation, étalonnage, lâcher et récupération demande une journée; ce point est à comparer avec la mise en œuvre des essais sur avion.

5,4

DIFFÉRENTES MÉTHODES ESSAYÉES

5,4.1 Première version (essais 4 à 9).

Cette version consistait, en la mesure directe du mouvement fin du ballon par détection de son accélération. En fait, nous avons considéré seulement les mouvements verticaux du ballon par détection de la composante verticale de l'accélération. Nous avons déjà vérifié que le ballon ainsi lesté n'oscillait pas. Le ballon constitue lui-même l'élément sensible aux rafales. Il est soumis à la pesanteur, à la poussée d'Archimède, à une force due au vent moyen qui est la composante continue des efforts dus au vent. Cette composante continue tend à s'annuler lorsque le ballon atteint la vitesse moyenne du vent. Il ne reste que les forces dues aux vitesses d'agitation qui ont une composante nulle, si V est la composante verticale des vitesses d'agitation, U la vitesse verticale du ballon, γ l'accélération verticale du ballon, on a :

$$(5,16) \quad m \gamma = m \frac{dU}{dt} = k_1 \int U dt + k_2 S (V - U)^2;$$

m et S masse et surface (maître-couple) du ballon k_1 et k_2 constantes. Cette équation n'est pas linéaire et ne permet pas de passer simplement du spectre des U au spectre des V . Cependant, en l'absence de résultats sur les C_x des ballons dans des courants d'air de 0 à 10 m/s, nous avons tenté une série de cinq essais (essais 4, 6, 7, 8 et 9). La mesure

(1) Vessie en latex « Para Kay » de 700 g ou 2 000 g (type météo).

(2) Au cours de tous les essais effectués jusqu'ici, aucun appareil n'a été détérioré.

(3) Deux agents techniques, dont l'un, ancien aérostier (M. Mossoux) et l'auteur.

Tableau récapitulatif des essais

NUMÉRO ESSAI	DATE ET LIEU	BUTS	MATÉRIEL			MONTÉE	RENSEIGNEMENTS MÉTÉO	AUTRES MESURES EFFECTUÉES	RÉSULTATS OBSERVATIONS
			VIEILLE ENV.	DÉTEC.	MOYEN MESURE				
1 15-3-51 Trappes		Étude oscillations d'un ballon équilibré	700 g Néant	Néant	Théodolites au sol	Remorqué jusqu'à 800 m	Ciel dégagé Vent ouest faible	Vitesse combustion cordon Bickfort	Remorquage par la partie inférieure ; mauvais. Muniterie ; bon.
2 29-3-51 Trappes		—	700 g Filet corde	Néant	Théodolites au sol	Remorqué	Couvert Plafond à 3 000 m	Surpression dans ballon au sol Temps de dégonflement	Essai de restitution de trajectoire par deux théodolites et liaison par téléphone.
3 5-4-51 Trappes		—	700 g Filet corde	Néant	Théodolites au sol	Remorqué 1 200 m environ	T = 13° P = 1 020 Calme ciel dégagé	Deux théodolites distants de 142 m	Restitution de trajectoire du ballon équilibré. Dérive. Résultats peu précis.
4 4-5-51 Trappes		Détection rafales Essai du matériel	700 g Nylon 2,50 m	Alti. Accél. (SFIM)	Enreg. SFIM A 20	Libre Force asc. 500 g	Cumulus à 2 000 m Vent W. moyen	—	Bon palier à 2 000 m. Bonne tenue du matériel. Accélération trop peu sensible (+ 2 g).
5 8-5-51 Trappes		Confirmation du palier à altitude fixe	700 g Nylon 2,50 m	Alti. (Sonde météo)	Radio (météo)	Libre Force asc. 150 g	Très couvert N.-W. fort pluie	Élasticité enveloppe pendant gonflement	Très mauvaise réception (conditions atmosphériques, palier à 380 m).
6 17-5-51 Trappes		Reprise essai 5 et remorquage	700 g Nylon 2,50 m	Alti. (Sonde météo)	Radio (météo)	Remorqué tracteur f. à 3 kg	Couvert Ondées vent N. moyen	—	Bon palier. Bon remorquage, poursuite correcte.

7 29-5-51 Mailly	Détection rafales	700 g Nylon 2,50 m	Alti. Accél. (SFIM)	Enreg. SFIM A 20	Libre Force asc. 150 g	Dégagé S.-E. faible	(Lancé à Granville) Sondages	Accélérations non décelables. Palier, poursuite et récupérations : bons.
8 30-5-51 Mailly	—	—	—	—	—	Dégagé S.-W. moyen	Préparation du matériel en campagne	Accélérations non décelables malgré turbulence au sol notable.
9 31-5-51 Mailly	—	—	—	—	Remorqué 1 850 m et Force asc.	Orageux Nimbus Vent E. moyen	Période propre du ballon 1,33 s (en vol)	Exploration zone altitude importante. Passage dans Nimbus, aucune accél.
10 9-10-51 Trappes	Détection rafales Petit ballon	700 g Nylon 2,10 m	Accél. SFENA 10,5 g	Téléme- sure (v. SFENA)	Remorqué 1 000 m	Vent nul parfaitement calme	Aucune turbulence constatée ce jour sur fumées	Aucune turbulence enregistrée. Essai à reprendre à cause du temps exceptionnel.
11 12-12-51 Trappes	Reprise essai 10	700 g Nylon 2,10 m	Accél. SFENA 10,5 g	Téléme- sure (v. SFENA)	Remorqué 1 200 m environ	1 2 convert Vent W. moyen	Accélérations décelées de l'ordre de grandeur du seuil de l'accél. (0,02 g).	
12 13-2-52 Mailly	Essai du matériel à fils chauds	2 000 g Nylon 3,40 m	4 fils chauds Alti.	2 enreg. SFIM A 20	Libre Force asc. 200 g	Dégagé Secteur W. moyen	Deux sondages préalables	Bons résultats, ordres de grandeur obtenus. Bonnes poursuite et récupération.
13 14-2-52 Mailly	—	—	2 fils chauds Alti.	2 enreg. SFIM A 20	Libre Force asc. 200 g	Cumulus secteur S.-W. fort	Deux sondages	Essai non prévu, effectué grâce à parfaite récupération lors de l'essai 12.
14 9-4-52 Mailly	Détection derafales	2 000 g Nylon 3,40 m	6 fils chauds Alti.	2 SFIM A 20	Libre Force asc. 200 g	Vent moyen E. S.-E. dégagé	Deux sondages	Bons résultats, en particulier rafale locale très nette.

Tableau récapitulatif des essais (suite)

NUMÉRO ESSAI DATE ET LIEU	BUTS	MATÉRIEL			MONTÉE	RENSEIGNEMENTS MÉTÉO	AUTRES MESURES EFFECTUÉES	RÉSULTATS OBSERVATIONS
		VERGIE ENV.	DÉTEC.	MOYEN MESURE				
15 14-5-52 Mailly	Détection de rafales	2 000 g Nylon 3,40 m	6 sondes Tension Alti.	2 SFIM A 20	Libre Force asc. 200 g	Vent N.-W. faible dégagé	Deux sondages Observation au théodolite (R 4)	Bons résultats parfaite- ment exploitables.
16 15-5-52 Mailly	—	2 000 g Nylon 4,00 m	6 sondes 1 fil froid Alti. sur- pression	3 SFIM A 20	Libre Force asc. 350 g	Vent W. moyen dégagé	Un sondage Observation depuis R 4	Bons résultats exploi- tables. Explosion sans flamme 15 mn après. Bonne récupération.
17 25-6-52 Mailly	—	2 000 g Nylon 4,00 m	6 sondes 1 fil froid Alti.	1HBA11 1 SFIM A 20	Libre Force asc. 300 g	Vent W. faible	—	(Sondes aux extrémités tube). Panne sur enregis- treur HB.
18 26-6-52 Mailly	—	2 000 g Nylon 3,40 m	6 sondes Alti.	2 SFIM A 20	Libre Force asc. 300 g	Vent W. faible	—	Bons résultats (sondes aux extrémités d'un croi- sillon).
19 <i>En préparation</i> (oct. 52) Mailly		2 000 g Nylon 4,00 m	6 sondes Alti.	3 SFIM A 20			—	
20 <i>En préparation</i> (oct. 52) Mailly		2 000 g Nylon 4,00 m	6 sondes Alti.	3 SFIM A 20			—	
21 <i>En préparation</i> (oct. 52) Mailly		2 000 g Nylon 4,00 m	4 sondes Alti.	3 SFIM A 20			Un enregistreur : 20 mn Deux enregistreurs en série : 40 mn	

de la vitesse ascensionnelle du ballon au voisinage du sol, jointe aux conditions atmosphériques au sol et à la force ascensionnelle, permettait de déterminer ces C_x pour les vitesses comprises entre 1 et 6 ou 7 m/s.

Les essais n^{os} 4, 5 et 6 n'ont décelé aucune accélération sur l'accéléromètre de sensibilité ± 2 g (seuil 0,02 g). Ils ont, par contre, permis par le dépouillement de la vitesse ascensionnelle, de montrer que seules des rafales de l'ordre de 10 à 15 m/s pourraient être décelées (seuil de l'accéléromètre).

Les essais n^{os} 4 et 6 avaient cependant montré que le ballon n'avait pas rencontré de rafales dont la vitesse aurait été supérieure à 10 m/s. A titre de vérification, nous avons entrepris trois autres essais (n^{os} 7, 8 et 9), à Mailly (Aube). Ces essais ont eu lieu dans des conditions météorologiques très différentes : tous ont conduit à une accélération non décelable. En particulier, l'essai n^o 9 a été effectué une heure environ avant un orage, la turbulence au sol était très élevée et le ballon est monté jusqu'à 1 800 m, probablement à moins de 200 m de la base des nimbus (annoncés à 2 000 m par la météo).

D'autre part, le ballon a été remorqué et la perturbation créée par la séparation des deux ballons a permis de mesurer la période propre de l'équipage : 1,33 s. Coefficient d'amortissement très faible (inférieur à 0,01). Malgré ce très faible amortissement, aucune autre oscillation n'a pris naissance au cours du vol (20 mn), ce qui laisse supposer que la turbulence était faible. Pour ce ballon, nous avons calculé ⁽¹⁾ qu'une rafale (verticale) de 15 m/s produirait sur le ballon une accélération de 0,12 g environ, valeur nettement supérieure au seuil de l'accéléromètre.

En conclusion de cette première série d'essais, il a été décidé de construire un matériel beaucoup plus léger, afin d'accroître sa sensibilité aux rafales. (Les forces dues aux rafales varient, en première approximation, comme le carré de la vitesse de rafales, l'accélération ressentie varie donc comme la puissance 2/3 du volume.) Au cours de ces essais, des ordres de grandeurs ont été obtenus (les rafales de 10 m/s et plus semblent très rares, même par temps d'orage), la stabilisation du ballon à altitude constante, le remorquage et la récupération ont été mis au point.

5.4.2 Deuxième version.

Nous avons finalement adopté une télémessure radio : cette disposition conduisait à un poids total minimum réduit à 55 % du poids total de la version 1. On a confectionné une enveloppe de 2,10 m de diamètre au lieu de 2,50.

L'accéléromètre à variation d'impédance provenait, comme la télémessure, de la S.F.E.N.A. ⁽²⁾. Le domaine de mesure était d'environ 0,01 g à 0,5 g. Le premier essai (n^o 10) a eu lieu à Trappes, le 19 octobre 1951, et malgré l'allègement et la sensibilité accrue, aucune accélération ne fut décelée. Il est vrai que le temps était exceptionnellement calme, puisque le ballon a parcouru moins de 3 km en 25 mn. Nous avons donc recommencé un essai identique, le 12 décembre 1951, à Trappes (n^o 11). (Temps nuageux, vent au sol moyen.) On a décelé, par endroit, des accélérations, assez brusques, de

(1) Par les essais n^{os} 7 et 8 qui comprenaient le même ballon et les mêmes accessoires, mais ont été faits sans « remorquage ».

(2) 27, rue du Pont, Neuilly-sur-Seine.

l'ordre de 0,03 g, cependant la bande d'enregistreur (au sol) est guère exploitable : les accélérations mesurées sont trop voisines du seuil de l'accéléromètre et la recherche d'une telle sensibilité ⁽¹⁾ conduit à une légère dérive du zéro, probablement due aux variations de température.

En conclusion de cette deuxième série d'essais (n^{os} 10 et 11), il résulte que la méthode consistant à enregistrer directement les mouvements du ballon autour de sa trajectoire moyenne est inexploitable dans l'état actuel de la technique. Cependant l'existence de rafales à vitesse supérieure à 15 m/s semble rare. Au cours de sept essais, de 20 mn chacun, on a rencontré une fois une rafale d'environ 15 m/s (essai n^o 11).

Deux solutions peuvent être considérées : l'une, délicate à mettre en œuvre, consisterait à étudier le mouvement d'un petit ballon lié à un ballon beaucoup plus gros par rapport à ce dernier. Le gros ballon, diamètre de l'ordre de 2 à 3 m, ne participerait pas à la turbulence, alors que le petit, diamètre de l'ordre du mètre, y participerait; cette méthode correspondrait bien à l'idée d'étude fine, donc locale, de l'atmosphère.

L'autre consiste à prendre un ballon, dérivant à altitude constante, et à le considérer comme un point fixe par rapport au vent moyen (volume à déterminer pour la bande de fréquence choisie). Des détecteurs liés rigidement au ballon détectent les vitesses d'agitation locales.

5.4.3 Troisième version.

Il s'agit d'abord de déterminer le volume du ballon considéré comme fixe par rapport au vent moyen. Deux facteurs conditionnent ce choix :

a) l'échelle des longueurs fixe un minimum au diamètre du ballon : il est, en effet, impossible de détecter des tourbillons de diamètre inférieur à celui du ballon;

b) l'inertie du ballon, variant comme le cube du diamètre, conduit à prendre un diamètre aussi grand que possible.

Compte tenu de ces deux conditions, nous avons cherché les caractéristiques dynamiques d'un ballon de 4 m de diamètre. Les dépouillements des résultats précédents ont montré que ce ballon devait être insensible à des rafales de 5 m/s, fluctuant avec une période de l'ordre de 5 s. (Les vitesses prises par le centre de gravité du ballon restent inférieures à 1 m/s.)

Une enveloppe de 4 m de diamètre a été confectionnée, et une vessie de 2 000 g utilisée. Il n'eut guère été préférable de prendre un diamètre supérieur. Les difficultés de mise en œuvre, par contre, auraient été considérablement plus importantes.

Les hautes fréquences seront détectées par des « fils chauds », détecteurs sur lesquels nous allons revenir, et les basses fréquences par un altimètre ou un variomètre. Les appareils commerciaux ont une constante de temps de l'ordre de 1 à 10 s pour les variomètres, mais toujours inférieure à 5 s pour les altimètres (la déviation est alors très faible).

Le poids de l'ensemble des appareils étant d'environ 30 kg, les dispositifs de suspension du matériel ont nécessité quelques précautions. En particulier, afin de réduire

(1) Le modèle commercial de cet accéléromètre a une gamme de $\pm$ g.

la vitesse d'impact au sol, les piles d'alimentation, après le déclenchement de la soupape étaient dégagées des appareils et suspendues à une dizaine de mètres sous le ballon. Arrivées au sol, elles servaient d'ancre et leur corde de suspension de guiderope.

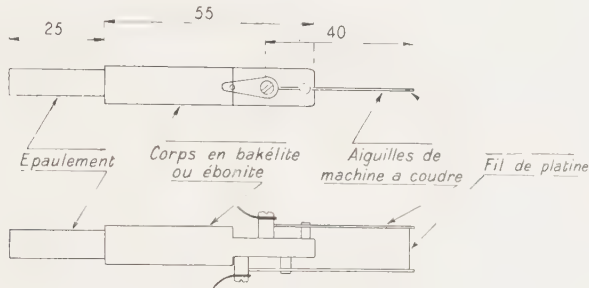


Fig. 63. — Fil chaud

Les détecteurs à fils chauds utilisés sont du même type que ceux utilisés à l'Institut de Mécanique des Fluides de Saint-Cyr, par MM. FORTIER et COMOLLET. Fil de 4/100 ou 6/100, longueur 10 mm, chauffé au rouge (fig. 63). Par contre, le fait que le fil reste toujours dans un circuit d'air dont les vitesses sont comprises entre 0 et 20 m/s nous

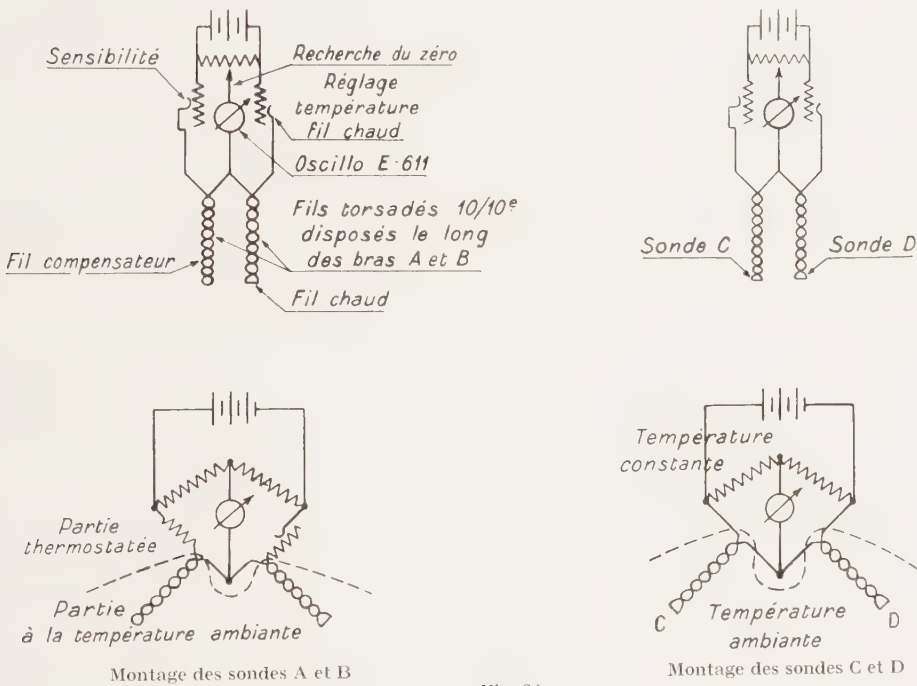


Fig. 64

permet d'utiliser un montage à « tension constante » au lieu du montage classique à « température constante » considérablement plus lourd et compliqué. Les variations de tension aux extrémités du fil sont enregistrées (fig. 64) par un galvanomètre enregistreur, Beaudouin E 6 II (résistance 600 Ω , déviation totale : 1 mA). Afin de tenir compte des

variations de résistance ⁽¹⁾ des conducteurs entre les sondes et la « boîte de contrôle », variations qui seraient susceptibles de faire dériver le zéro des spots dans l'enregistreur, on a placé des « fils compensateurs » comme l'indique le schéma.

5,5 RÉSULTATS OBTENUS AVEC LES DÉTECTEURS A FILS CHAUDS

5,5.1 Choix des sondes et étalonnage.

Les essais nos 12 et 13 ont permis de vérifier le bon fonctionnement du matériel et de fixer les ordres de grandeur.

Nous avons, par la suite, essayé systématiquement des ondes de 2/100, 4/100, 6/100 et 8/100 de mm chauffées à diverses températures pour des vitesses de 0 à 10 m/s. Ces mesures ont été faites au bras tournant (voir figure à l'Annexe II). Elles sont résumées

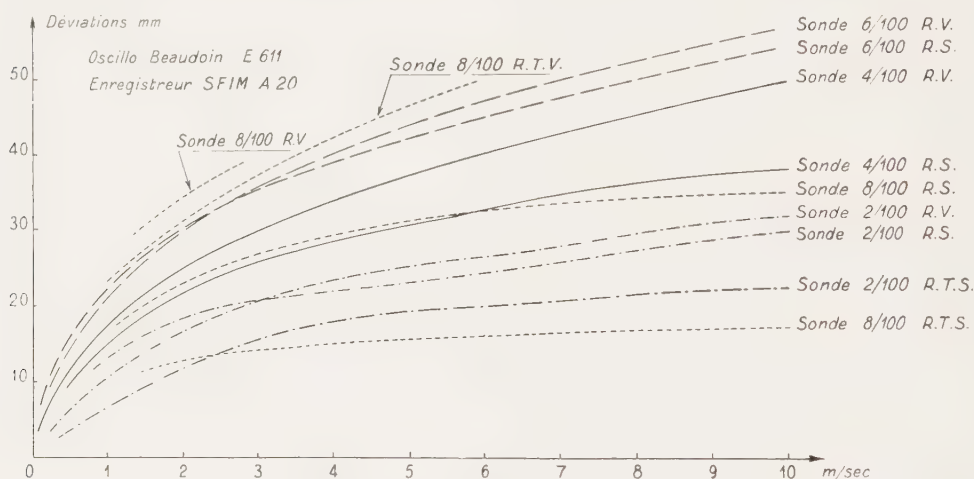


Fig. 65. — Comparaison sondes 2/100, 4/100, 6/100, 8/100
R.S. : rouge sombre ; R.V. : rouge vif ; R.T.S. : rouge très sombre ; R.T.V. : rouge très vif

sur le graphique de la figure 65. Nous avons retenu la sonde 4/100, chauffée au rouge vif, qui peut être considérée comme *linéaire* dans la zone 2,5-10 m/s avec une erreur inférieure à 3 %. Au cours de chacun des essais suivants, nous avons toujours utilisé au moins une sonde 4/100.

La linéarité n'apparaissant que pour des vitesses supérieures à 2 ou 3 m/s, il peut sembler intéressant de laisser au ballon une vitesse ascensionnelle de 2 à 3 m/s. Nous avons utilisé cette remarque sans l'essai n° 16 où la rencontre d'une zone très peu turbulente (vitesses inférieures à 1 m/s) permet un calcul précis de la fonction d'autocorrélation des rafales.

Les étalonnages sont effectués immédiatement avant les essais sur le terrain à l'aide d'un « bras tournant » (Annexe II). Lors des essais nos 17 et 18, on a essayé d'effectuer l'étalonnage en faisant tourner à différentes vitesses l'ensemble sondes support, boîte de contrôle (voir Annexe II).

(1) Dues aux variations de température entre le sol et l'altitude du palier.

5,5.2 Grandeurs enregistrées.

Au cours des essais nos 12 et 13 on a enregistré séparément les indications de deux sondes, disposées aux deux extrémités, apposées d'un croisillon (longueur de chaque bras : 3,50 m). Sur les deux autres bras étaient montées deux sondes, faisant

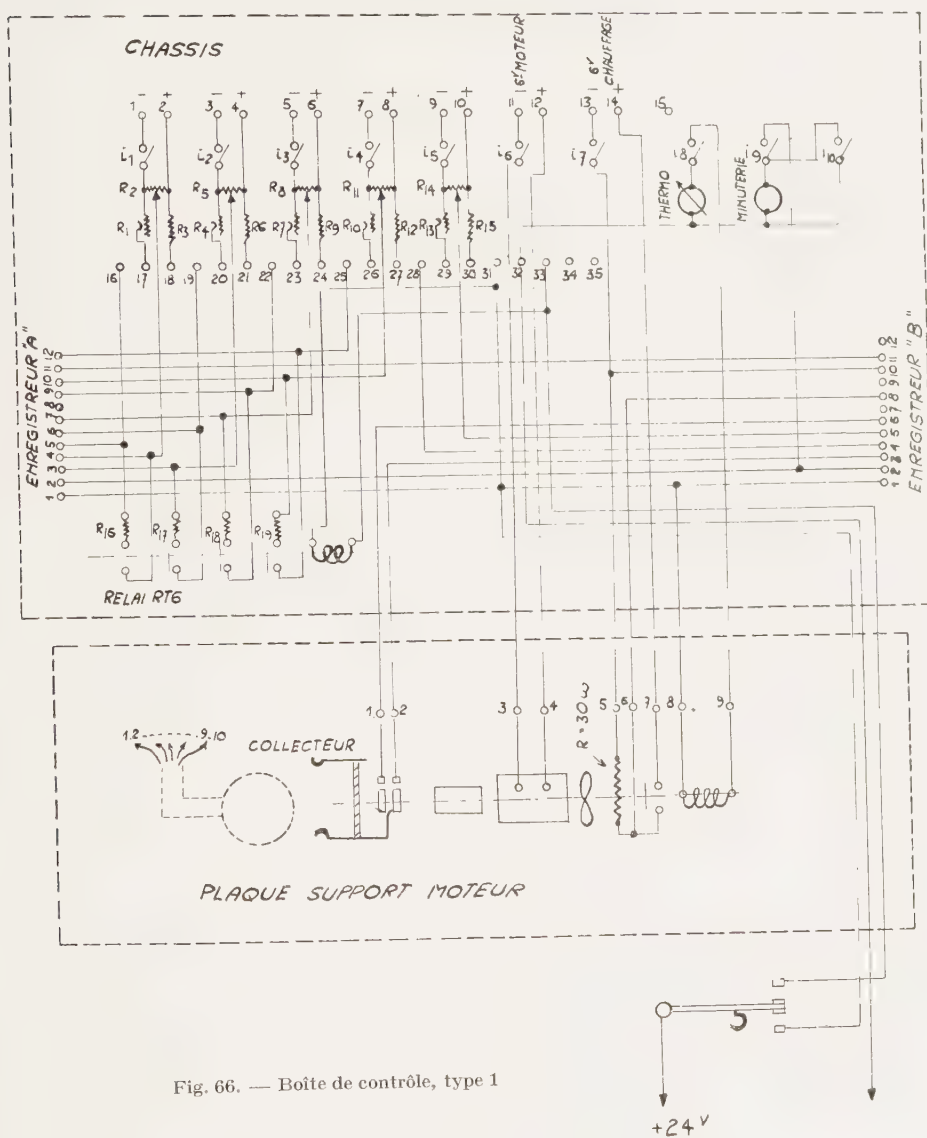


Fig. 66. — Boîte de contrôle, type 1

partie du même pont de Wheatstone (sondes C et D du schéma précédent). Cette disposition avait pour but de détecter les rafales *locales* agissant sur l'une des sondes sans agir sur l'autre.

On a enregistré également l'altitude du ballon.

L'essai n° 14 correspondait à une disposition analogue.

Les essais n^{os} 15 et 16 comportaient, sur deux bras opposés, quatre sondes : deux à chaque extrémité, distantes verticalement de 150 à 300 mm ⁽¹⁾, chacune de ces sondes était montée dans un pont de Wheatstone dont le galvanomètre était placé dans un enregistreur. Cette disposition renseigne sur la direction des rafales, par mesure des décalages dans le temps des indications recueillies sur les films des enregistreurs.

Sur les deux autres bras étaient disposées deux sondes de 4/100, montées dans deux branches d'un même pont de Wheatstone.

La boîte de contrôle, type 1 (*fig. 66*), utilisée dans les essais n^{os} 15 et 18, était thermostatée et comprenait des dispositifs de sécurité ⁽²⁾ pour éviter de détériorer les oscillographes en cas de rupture des fils chauds à l'atterrissage. Enfin, une minuterie réglable permettait de ne déclencher les enregistreurs qu'entre 0 et 6 mn après le lâcher.

La boîte de contrôle type 2 (*fig. 67*), utilisée dans les essais n^{os} 16 et 17, est analogue à la boîte type 1, mais comporte en plus une sonde de température (fil « froid » de 2/100; résistance à 20° : 600 Ω ; courant de mesure inférieur à 1 mA). D'autre part, les diverses indications sont réparties sur trois enregistreurs S.F.I.M. A 20 ou A 22, au lieu de deux pour la boîte type 1. Sur l'un de ces enregistreurs était monté, lors de l'essai n^o 16, un manomètre différentiel 0-10 millibars destiné à contrôler la surpression de la vessie.

Enfin, la disposition des sondes en croix a été abandonnée au profit d'une disposition plane (toutes les sondes sont aux extrémités d'un seul tube long de 8 à 9 m), dans l'essai n^o 17.

Les essais en préparation et à venir comporteront cette même dernière disposition. Les essais n^{os} 19 et 20 correspondront à l'essai n^o 17; quatre sondes enregistrées séparément et deux sondes en série, une à chaque extrémité, pour la détection des rafales locales.

Il est prévu pour les essais n^o 21 et suivants le montage d'une camera photographiant le sol à la cadence d'une image/seconde. Ce dispositif permettra d'avoir la vitesse instantanée horizontale du ballon. Nous verrons en quoi cette grandeur est intéressante.

5,5.3 Aspects des résultats.

Les essais n^{os} 12 à 18, correspondant à cette troisième version, ont tous donné des résultats analogues. Les quinze bandes d'enregistreur obtenues correspondant à des temps très variables (beau, orageux, pluvieux) sont très cohérentes et riches de renseignements qui ne pourront être complètement exploités que lorsque des machines permettront le dépouillement automatique (en particulier, le chronographe statistique, décrit au chapitre précédent, mais non encore terminé).

Cependant nous avons constaté le résultat assez inattendu suivant, résultat retrouvé dans la plupart des essais :

— on a trouvé l'existence de rafales locales relativement fortes (2 à 5 m/s) : ces rafales agissaient sur l'un des deux fils chauds montés dans le même pont, sans agir sur

(1) Marc PELEGRIN, Comptes rendus 235, 1952, pp. 19-21.

(2) Relais RT 6, shuntant les oscillos au moment du déclenchement de la soupape. Cette disposition a l'avantage de ne pas introduire de résistance de contact parasite.

l'autre, distant de 8 à 9 m. L'enregistrement le plus net a été obtenu lors de l'essai n° 11 (voir photos « échantillon I »). La partie sensiblement rectiligne du spot correspond au

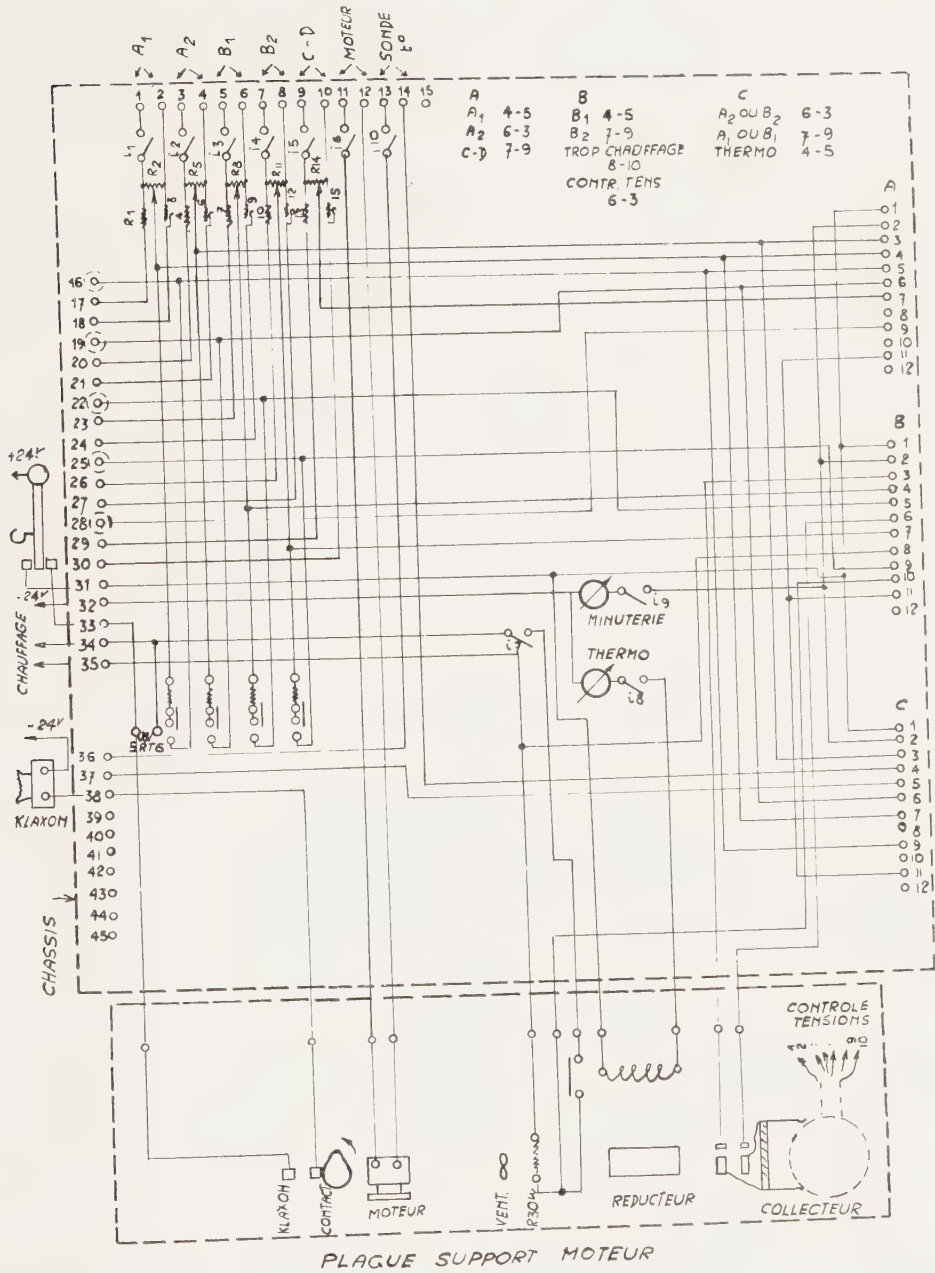


Fig. 67. — Boîte de contrôle, type 2

pont en équilibre : les autres sondes enregistrées séparément montraient qu'il n'y avait pratiquement aucune turbulence. Le pont a été fortement déséquilibré durant 14 s (les

autres sondes, montées sur les deux autres bras du croisillon (1) n'ont enregistré aucune turbulence durant ces 14 s). L'équilibre du pont a été ensuite rétabli.

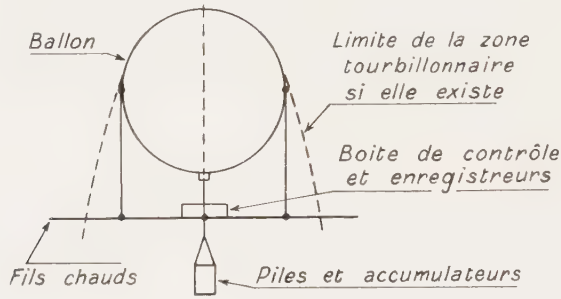


Fig. 68

Le « zéro » du pont au voisinage de cet instant correspond à une vitesse constante d'environ 0,5 m/s, valeur concordante avec celle déduite de la courbe altimétrique (0,55 m/s).

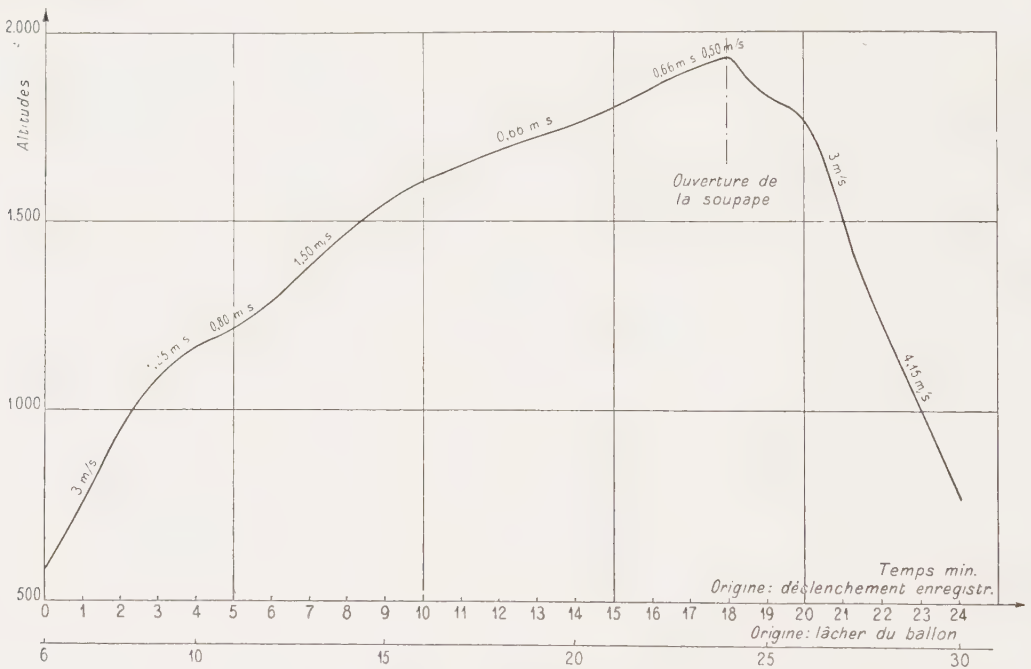


Fig. 69. — Courbe d'altitudes
(Essai n° 15, Mailly, 14 mai 1952, ballon de 3,40 m)

L'hypothèse selon laquelle il s'agirait d'un tourbillon marginal détaché du ballon est difficilement acceptable; les tourbillons libres à cette vitesse ne se détachent pas au

(1) La disposition des sondes en croix n'est pas bonne. Cet essai fut un des premiers de la troisième version et, pour des questions d'arrimage de ces appareils sous le ballon, nous avons d'abord adopté le croisillon. Par suite, les sondes ont été placées aux extrémités d'un seul tube.

voisinage de l'équateur [16] et la géométrie du système montre que de tels tourbillons, s'ils avaient existé, n'auraient pu rencontrer l'une des sondes (*fig. 68*).

Nous avons, d'autre part, envisagé tous les incidents de fonctionnement possibles, aucun ne correspondrait à un tel enregistrement.

Nous admettrons donc qu'il s'agit d'un tourbillon isolé se déplaçant dans le vent homogène.

Autre résultat :

— la *figure 69* représente la courbe ascensionnelle du ballon. On voit nettement, sur les échantillons (1) A, B, C et D (correspondant à des portions de la bande de l'enregistreur 313) (*fig. 71*), qu'on peut distinguer entre les zones *turbulentes* (échantillon A (2))

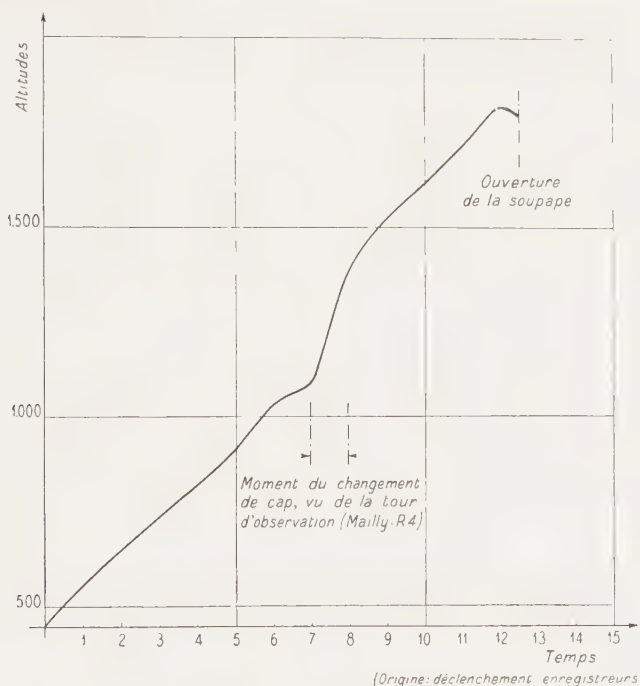


Fig. 70. — Courbe d'altitudes
(Essai n° 16, Mailly, 15 avril 1952, ballon de 4 m)

altitude 700-1 000 m; échantillon C, altitude 1 600-1 700 m) et des zones à *turbulence nulle* (échantillon B, altitude 1 300-1 400 m; échantillon D, 1 800-1 900 m).

Les échantillons E et F correspondent aux enregistrements des sondes B¹ et B² qui, à titre d'essai, étaient constituées par un fil de platine de 6/100.

Ces zones à turbulence nulle ont permis de vérifier la concordance des vitesses ascensionnelles données par l'altimètre et par les étalonnages des sondes au bras tournant.

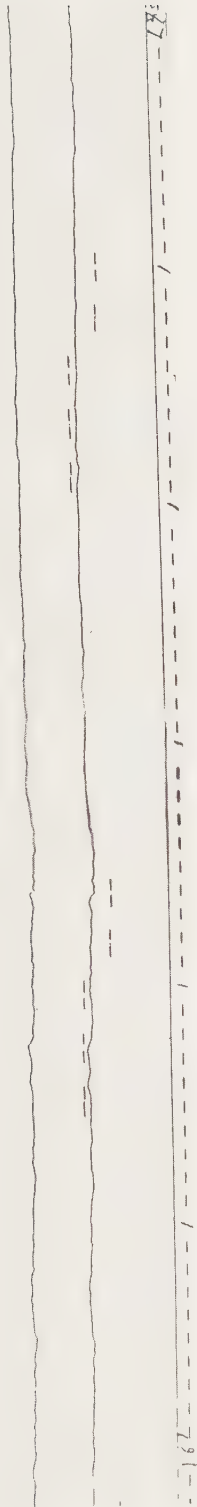
(1) Sur les échantillons A,B,C,D (*fig. 69-71*) figurent les indications des deux sondes A₁ et A₂ disposées à 150 mm, verticalement, l'une de l'autre. Sur l'échantillon F figure en plus l'indication du pont à deux sondes C et D. Sur les échantillons F,G,H, figure en plus le ou les spots de l'altimètre. Sur l'échantillon I ne figure que l'indication des sondes C et D et celle de l'altimètre.

(2) Les « tops » que l'on voit sur les photos correspondent aux relevés périodiques des tensions d'alimentation des fils chauds par un commutateur tournant et un oscillo.



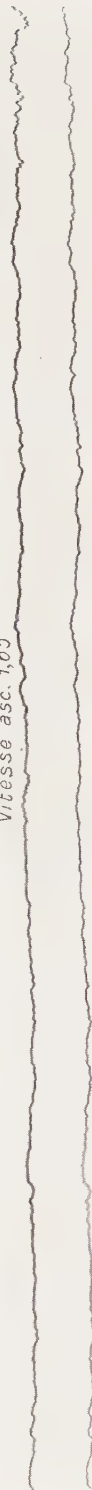
Fig. 71

Vitesse asc. 0,66



Échantillon D. — Essai n° 15, Mailly, 14 mai 1952, enregistreur n° 313 (16' à 17')

Vitesse asc. 1,65



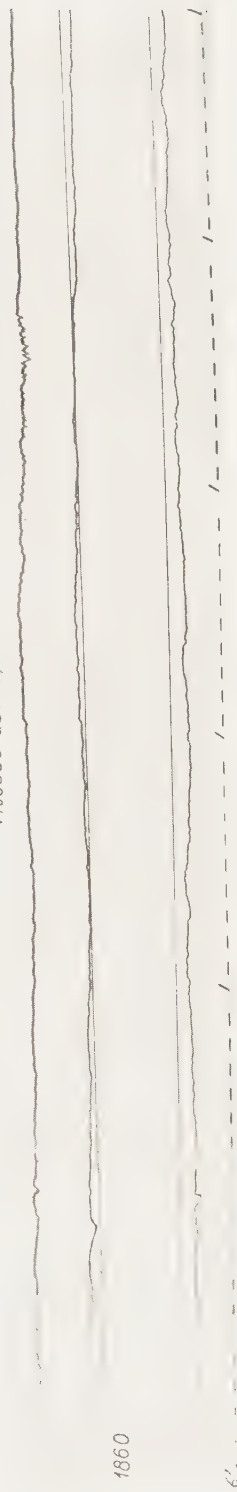
Alt. 1480 m



Alt. 1280 m

Échantillon E. — Essai n° 15, Mailly, 14 mai 1952, enregistreur n° 316 (7' à 8')

Vitesse asc. 0,66



Échantillon F. — Essai n° 15, Mailly, 14 mai 1952, enregistreur n° 316 (16' à 17')

Fig. 71 (suite)

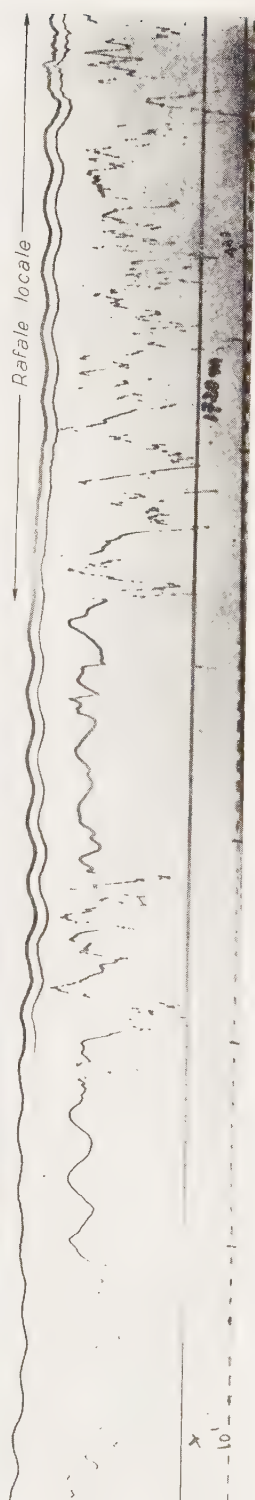
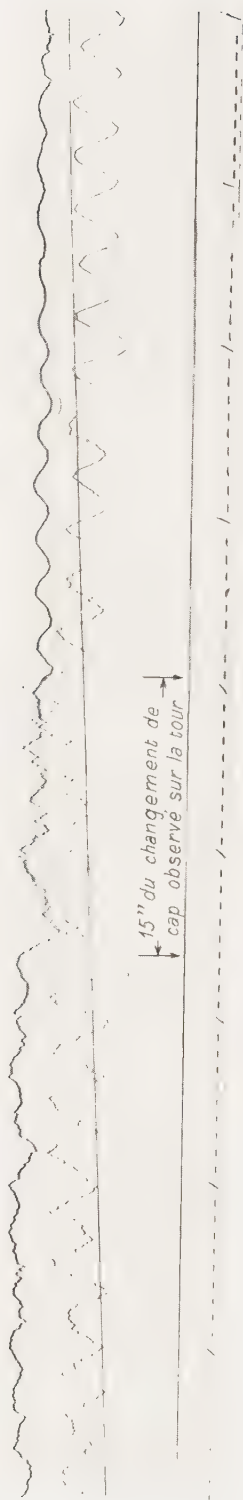


Fig. 71 (suite)

Elles ont également permis de vérifier que, dans la disposition adoptée, la variation de la température ambiante ou l'hygrométrie n'avaient pas d'influence sur les résultats enregistrés.

Au cours de l'essai n° 16, la courbe d'altitude du ballon, représentée *figure 70*, présente une « discontinuité » entre la minute 7 et la minute 8. Cette période a coïncidé précisément avec l'instant de changement de cap observé au cours du vol ⁽¹⁾. On a reproduit, sur l'échantillon G, la bande au voisinage de cet instant. On constate une turbulence caractéristique enregistrée sur toutes les sondes. Le spot supérieur correspondant à la sonde A₁ accuse des variations, relativement *faibles* mais à fréquence élevée. Le troisième spot à partir du haut ⁽²⁾ accuse au contraire une très forte turbulence. Il en résulte que, dans cette zone de transition, les vitesses ne sont, relativement, pas trop élevées, les fréquences sont élevées et aucune corrélation n'existe entre les vitesses en deux points distants de 8 m. Par contre, l'examen des deux premiers spots montre que la corrélation entre les vitesses en deux points distants de 150 mm est élevée, les deux courbes restant sensiblement parallèles. Quant à la grande vitesse ascensionnelle constatée durant cette période transitoire, elle peut s'expliquer par la diminution de la résistance due à de nombreux petits tourbillons (fait à rapprocher des observations faites « sur la vitesse ascensionnelle des ballons de caoutchouc », par M. PONCELET [16]; il existerait, d'après cet auteur, deux régimes d'écoulement possibles qui conduiraient à des variations de résistance de 4 à 1, lorsque la vitesse du courant d'air croît. D'autre part, toujours d'après le même auteur, il y aurait intérêt à rendre « microturbulente » la couche d'air au voisinage du ballon. L'auteur proposait de coller des cercles de caoutchouc sur le ballon. Le fait que l'atmosphère locale soit microturbulente pourrait-il conduire au même résultat ?)

On pourrait aussi imaginer un vaste tourbillon dont le diamètre serait de l'ordre de la centaine de mètres et l'axe horizontal. Les essais futurs préciseront ce point.

On remarquera que la valeur moyenne des courbes des sondes A₁ ou A₂ qui correspond, d'après notre définition, à la valeur moyenne du vent (vent moyen) n'indique pas, par un décalage de la ligne moyenne durant ces 15" de transition, une vitesse ascensionnelle nettement différente des périodes voisines. Il est donc possible que la bande passante « sonde + oscillographe » soit insuffisante ⁽³⁾ : le refroidissement constaté proviendrait surtout des composantes à basse fréquence.

Enfin, on notera que, par rapport à cette zone de transition, la couche inférieure était peu turbulente et la zone supérieure pas turbulente. [Il ne faut pas tenir compte des oscillations quasi-sinusoïdales qui correspondent aux oscillations de l'équipage qui avait été suspendu trop bas lors de cet essai; ces oscillations sont d'ailleurs dues au passage dans une autre zone turbulente, vers la minute 6 ⁽⁴⁾.]

L'échantillon H, correspondant au même essai, montre un autre exemple de rafales locales au voisinage de la minute 11.

(1) Théodolite installé sur le toit du réservoir R 4 de Mailly; les azimuth et cap étaient notés de 30 s en 30 s, ainsi que toute remarque pouvant être intéressante (oscillation du ballon, etc.).

(2) Le deuxième spot peu visible sur cette reproduction correspond à la sonde A₂, distante de 150 mm de A₁.

(3) Elle est probablement voisine de 50 Hz.

(4) Au voisinage de cet instant d'ailleurs a correspondu une « cassure » dans la courbe d'altitude.

5,5.4 Dépouillement point par point.

Ces constatations à vue ne peuvent se compléter par un dépouillement point par point, ce travail est très long, permet à chaque instant d'avoir la vitesse moyenne ascensionnelle du ballon, la grandeur du module de la rafale et sa direction grâce à la disposition des deux sondes. Nous avons dépouillé ainsi un certain nombre de points. On a généralement trouvé des rafales dont la vitesse était inférieure à 3,70 m/s. La rafale la plus importante qui a été dépouillée était d'environ 8,50 m/s (essai n° 17).

A l'aide du chronographe statistique, utilisé en lecteur de courbe, et d'une machine à calculer arithmétique, possédant deux mémoires rapides à cinq nombres chacune (1), il est aisé, comme on le vérifiera, de tracer une rosace de rafales : chaque point dépouillé serait traduit en coordonnées polaires (module de direction); les différents vecteurs obtenus seraient additionnés secteur par secteur (*fig. 72*).

Si, par contre, on s'attache à des propriétés moyennes, on peut tirer directement des résultats de ces renseignements à l'aide d'un corrélateur.

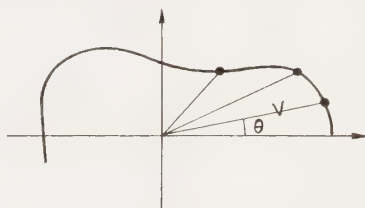


Fig. 72

5,6 RÉSULTATS STATISTIQUES — SPECTRE D'UNE TURBULENCE

5,6.1 Fonction d'autocorrélation et spectre.

Nous avons considéré, à titre d'exemple, l'épreuve constituée par les cinq premières minutes de l'enregistrement de l'essai n° 15 (enregistreur S.F.I.M. n° 316, sonde A_2). Nous avons considéré cette épreuve comme homogène, d'une part, à cause de l'allure de l'enregistrement qui apparaît lui-même comme bien homogène et, d'autre part, à cause de la vitesse ascensionnelle du ballon qui est restée constante durant ces 5 mn. En fait nous avons considéré des sous-épreuves, correspondant chacune à une minute d'enregistrement (2), (cette minute étalée sur environ 3 m du rouleau de papier de l'autocorrélateur est lue automatiquement par la machine en 10 mn environ).

La première opération a consisté à reproduire (avec changement d'échelle), la partie du film de l'enregistreur sur le papier de l'autocorrélateur. Nous avons obtenu le rapport 15, en effectuant d'abord un agrandissement photographique de 5, puis une

(1) Une machine arithmétique construite par la S.E.A. pour un usage bien déterminé permettrait, moyennant son couplage avec le chronographe statistique et l'introduction d'un « programme » correspondant, de faire un dépouillement.

(2) L'autocorrélateur O.M.E.15 possède, en effet, des intégrateurs à courant continu : leur dérive est encore négligeable après 10 mn de fonctionnement, mais il est bon d'arrêter la machine, de reprendre les zéros et de continuer à nouveau une dizaine de minutes.

recopie au pantographe (rapport 3). Ces deux opérations effectuées dans cet ordre sont précises; différents contrôles ont montré que l'erreur relative commise était inférieure à 1 % et aléatoire (à valeur moyenne vraisemblablement nulle).

Cette courbe a été ensuite reproduite identiquement, automatiquement par la machine (fidélité nettement supérieure à 1 %).

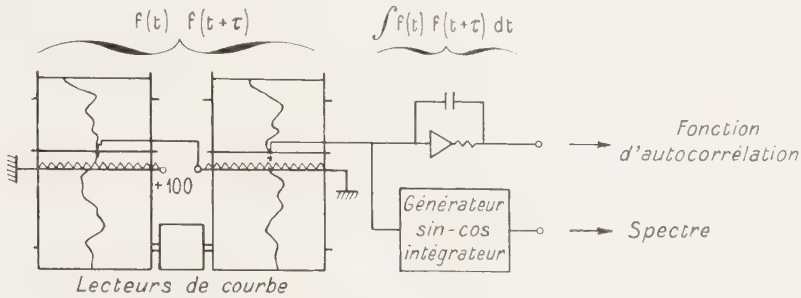


Fig. 73. — Principe de l'autocorrélateur O.M.E. 15

VALEUR MOYENNE DE L'ÉPREUVE.

L'axe moyen a d'abord été déterminé ⁽¹⁾ [à l'aide de l'autocorrélateur (fig. 73) dont on n'utilisait qu'un lecteur et un intégrateur].

Cet axe, transcrit sur l'enregistrement initial, a permis de vérifier que les vitesses moyennes ascensionnelles données par l'altimètre et par cette valeur moyenne étaient concordantes et voisines de 2,05 m/s.

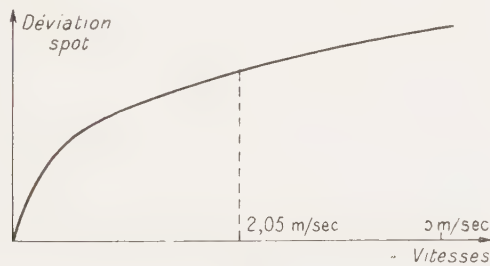


Fig. 74

D'autre part, la courbe d'étalonnage de cette sonde, le jour de l'essai, a permis de définir la sensibilité au voisinage de cette valeur; 1 mm d'ordonnée correspondait à une variation de vitesse de 20,5 cm/s, au voisinage de la vitesse 2,05 m/s (fig. 74).

La fonction d'autocorrélation a été calculée pour différents décalages. A titre d'indication, signalons que l'obtention d'un point de la fonction d'autocorrélation demandait 45 mn (longueur de papier lue pour chaque point : 10 à 15 m). Les opérations préliminaires (reproductions, agrandissements) s'effectuèrent d'une manière plus automatique dans un proche avenir.

(1) Calculs effectués au Laboratoire du Calcul Électronique du S.T.Aé (S.E.A., Courbevoie).

FONCTION D'AUTOCORRÉLATION.

Les résultats sont donnés sur la *figure 75*. Il est à noter que la tangente pour $\tau = 0$ est très vraisemblablement horizontale, bien que la pente de la courbe pour des τ très petits soit très élevée. Nous avons serré les points dans ce domaine.

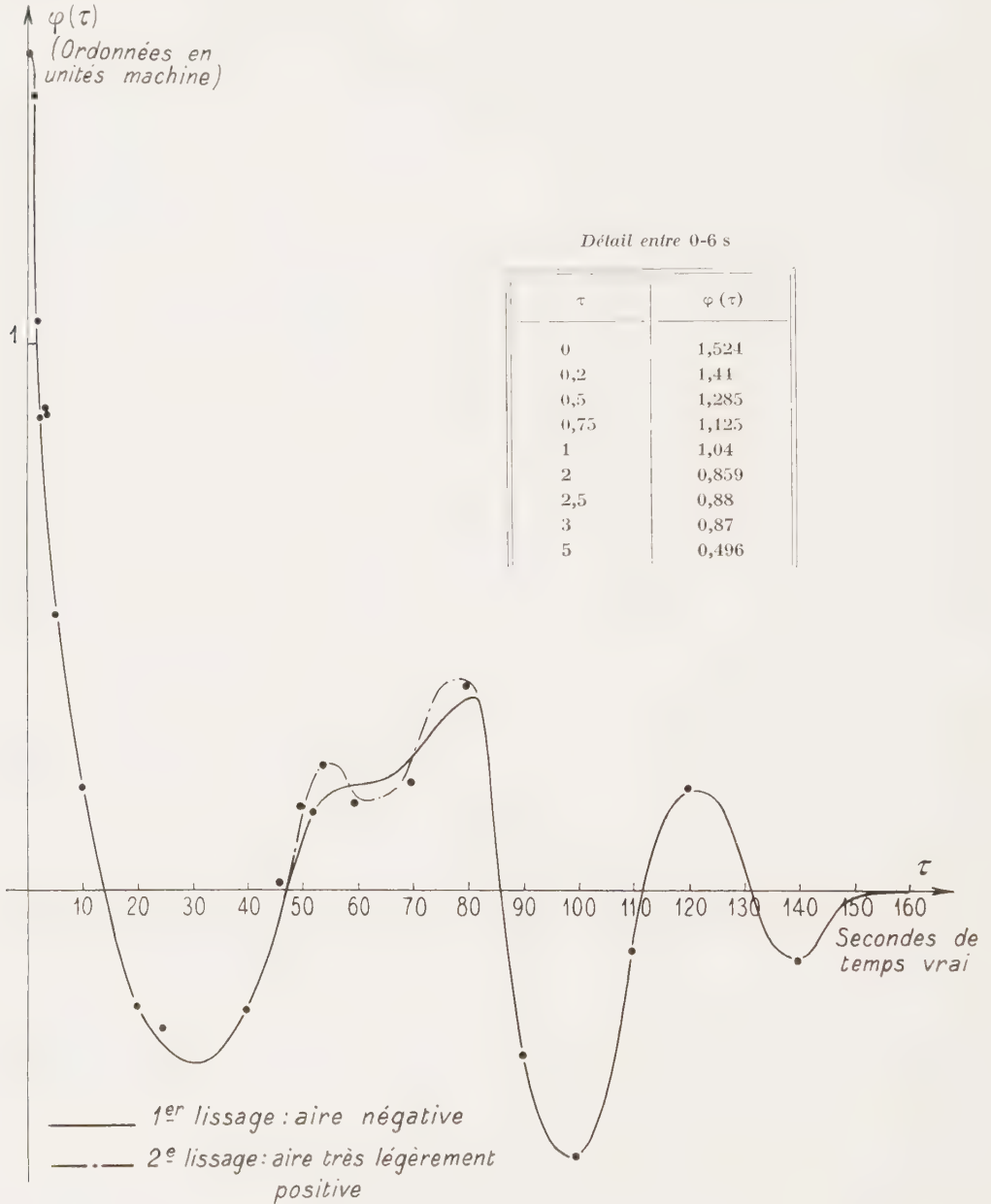


Fig. 75. — Fonction d'autocorrélation

• Points donnés par l'autocorrélateur

Cette partie très aiguë laisse penser que la turbulence enregistrée se rapproche d'un « bruit blanc » pour lequel la fonction d'autocorrélation se réduit à une « impulsion à l'origine ».

La fonction d'autocorrélation présente ensuite une pente plus faible, s'annule par $\tau = 15$ s environ et présente enfin une série d'oscillations qui ne s'amortissent finalement que vers $\tau = 150$ s.

Ces oscillations d'amplitude, assez inattendues, nous ont conduit à rechercher toute cause possible d'oscillations correspondant à des périodes voisines de 30 s. Or, ni les oscillations pendulaires de l'équipage (période 1,33 s — oscillations, en général, négligeables), ni la rotation de l'ensemble du croisillon qui a été constatée et notée ⁽¹⁾ lors de l'essai (un tour en 190 s) ne correspondent à ces périodes. On peut donc admettre,



Fig. 76. — Spectre énergétique (donné par la machine)

$$\Phi = L \int_0^{\infty} \varphi(\tau) \cos \omega \tau d\tau$$

jusqu'à plus ample informé, que ces corrélations, alternativement positives et négatives, correspondent à un phénomène lié à la turbulence et doivent être maintenues pour le calcul du spectre.

Les points indiqués sur le graphique de la fonction d'autocorrélation sont des points exacts en général obtenus deux fois; la fonction d'autocorrélation devrait, en principe, les rencontrer tous. On a cependant « lissé » la fonction avant de la passer dans la machine, à nouveau, pour obtenir le spectre. L'épreuve étudiée n'était, en effet, pas rigoureusement stationnaire et les fluctuations d'énergie [équation (5,14)] peuvent

(1) On pourrait, en effet, penser que le fait que les sondes passent périodiquement dans l'ombre du ballon conduit à une information décelable.

atteindre 7 % d'après le calcul fait sur les sous-épreuves. L'instant auquel on commence à calculer la fonction n'est donc pas indifférent et nous pensons que si l'épreuve avait été plus longue, ou si l'on avait pu refaire le calcul avec diverses origines des temps, la moyenne de ces résultats aurait contribué au lissage de la courbe.

SPECTRE.

Les unités machines seront transformées en m/s au paragraphe 5,6.2.

Après avoir calculé un spectre, nous nous sommes assurés qu'une légère modification du tracé de la courbe de corrélation, notamment au voisinage de $\tau = 50$ s, ne modifiait pas sensiblement le spectre. De plus, nous avons pris la transformation inverse, afin de vérifier la validité de l'intrapolation.

Le spectre, tracé sur la *figure 76*, représente le spectre des modules des vitesses d'agitation de l'atmosphère.

La valeur de ce spectre pour l'argument nul a d'ailleurs été déterminée, directement au planimètre. Nous avons effectué le lissage de façon telle que l'aire définie par la fonction d'autocorrélation ne soit pas négative. La première courbe tracée (trait plein) correspondait, précisément, à une aire très légèrement négative. Nous avons utilisé la courbe en trait mixte à laquelle correspondait une aire très légèrement positive. Il ressort de ceci que la valeur de la fonction spectrale à l'origine est très faible, sinon nulle.

5,6.2 Coefficient de turbulence de l'atmosphère.

DRYDEN ⁽¹⁾ a défini « l'intensité de la turbulence » par le coefficient :

$$T = \frac{V u^2}{V_0},$$

où u est la vitesse d'agitation et V_0 la vitesse de la *soufflerie*.

Ici, nous avons une mesure directe du numérateur et, d'après la méthode même, il ne semble pas nécessaire de rapporter cette mesure soit à la vitesse du vent moyen, soit à la vitesse d'exploration de la tranche d'atmosphère (ici 2,05 m/s).

Le calcul de la racine carrée de la moyenne des carrés des vitesses d'agitation (on rappelle qu'on a enregistré les modules de ces vitesses) est fourni par le point d'argument nul de la fonction d'autocorrélation de ces vitesses :

$$\varphi(0) = \frac{1}{T} \int_0^T \overline{u(t)^2} dt.$$

Compte tenu des unités propres à la machine et des changements d'échelle, nous avons trouvé pour ce point :

$$(\overline{f(t)})^2 = 0,0096,$$

soit :

$$\sqrt{\overline{f(t)}} = 0,098 \text{ m/s.}$$

(1) N.A.C.A., report n° 342, 1929.

Cette valeur, directement liée à l'agitation de l'air correspond à la turbulence *intrinsèque* de l'atmosphère.

A titre de comparaison, pour un avion volant à 45 m/s, on trouve une intensité de la turbulence, au sens de Dryden, égale à :

$$T = 0,0021,$$

valeur qui est sept fois plus forte que celle (0,0003) signalée par STEFFENS et HALL (mesures effectuées en vol, 1948).

Il est hasardeux de tirer une conclusion de ces nombres, les expériences n'ayant pas été systématiquement répétées ⁽¹⁾.

De toute façon, l'atmosphère semble nettement moins turbulente que les souffleries actuelles pour lesquelles l'intensité de la turbulence est en moyenne égale à 0,01.

5,6.3 Corrélations mutuelles.

Les corrélations étudiées jusqu'ici étaient relatives aux vitesses enregistrées sur une sonde.

On peut étudier également la corrélation mutuelle *spatiale*, en considérant la fonction de corrélation entre l'enregistrement des vitesses sur une sonde, A_1 par exemple, et l'enregistrement des vitesses sur une autre sonde, les temps étant *concordants*. L'argument de cette fonction correspond aux distances entre les sondes.

L'exécution de ces calculs nécessite, actuellement, les reproductions sur les deux bandes de papier de la machine et le travail n'a pas été suffisamment avancé pour pouvoir donner les résultats ici.

5,6.4 Stationnarité dans l'espace.

De même la répétition de ces calculs, et tout particulièrement du calcul de la fonction d'autocorrélation d'épreuves obtenues en des lieux différents et à des époques différentes, est en cours. Malgré les machines qui permettent d'obtenir un point d'une fonction de corrélation et une durée variant de 30 mn à 45 mn, ces calculs restent longs, surtout à cause des transcriptions inévitables. L'accélération de l'ensemble de ces opérations est en cours d'étude et on peut espérer, d'ici quelques mois, réduire de moitié le temps de calcul.

La façon dont nous avons opéré (section de l'épreuve totale en cinq sous-épreuves) nous a permis de tracer des fonctions d'autocorrélation partielles correspondant à chacun de ces échantillons pour lesquels, vraisemblablement, l'équilibre statistique n'était pas atteint. Nous avons constaté que les courbes que l'on peut ainsi tracer ne sont pas superposables, mais sont sensiblement affinées les unes des autres.

(1) Travail en cours actuellement.

CONCLUSION

Ce dernier chapitre nous a donc conduit à un « spectre de la turbulence ». Il est nécessaire de reprendre maintenant ce problème dans le détail, afin d'obtenir les spectres relatifs à des quantités moins générales que les modules des vitesses. Nous avons évidemment bien simplifié le problème en nous attachant seulement aux modules, mais notre but était de montrer comment une telle étude pouvait être amorcée et comment mener à terme le calcul du spectre à partir des données expérimentales enregistrées.

L'emploi de machines, comme nous l'avons souligné au chapitre IV, s'impose indubitablement.

Les théories, principalement développées aux chapitres II et III, sont donc susceptibles d'applications concrètes et permettent, par exemple, la synthèse directe d'un pilote automatique d'avion; la fonction de transfert du réseau correcteur se détermine conformément au chapitre II, si le système ne comporte que des éléments linéaires. Si les moteurs de gouvernes sont commandés par relais, les calculs du chapitre III permettent de tenir compte de ces éléments non linéaires.

Le spectre des perturbations (supposées principalement dues aux rafales) peut s'obtenir suivant la méthode que nous venons de suggérer; quant au spectre de la fonction d'entrée, on peut, dans le cas d'un chasseur-intercepteur, le calculer à partir des considérations statistiques sur le mouvement du but.

ANNEXE I

CIRCUIT A AVANCE DE PHASE, ENTRÉE SINUSOÏDALE (compléments au § 1,2.2)

Nous reproduisons les calculs qui sont suffisamment explicites par eux-mêmes (fig. 77).

Entrée :

$$e = E \sin (\omega t + \varphi).$$

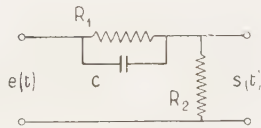


Fig. 77

Équation différentielle du circuit :

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} + \frac{1}{\tau} s &= \frac{de}{dt} + \frac{1}{a} e \\ a &= \frac{R_1 + R_2}{R_2}, \\ \tau &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} R_1 C. \end{aligned}$$

Intégrale particulière :

$$s = S \sin (\omega t + \psi);$$

s et ψ définis par :

$$\frac{S}{E} e^{i(\psi - \varphi)} = H(i\omega),$$

où :

$$H(p) = \frac{1}{a} \frac{1 + a\tau p}{1 + \tau p}.$$

Intégrale générale :

$$s(t) = S \sin (\omega t + \psi) + K e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Condition initiale :

$$s(0) = 0,$$

donc :

$$s(t) = S \left[\sin (\omega t + \psi) - \sin \varphi e^{-\frac{t}{\tau}} \right].$$

Calcul de $H(i\omega)$:

$$H(i\omega) = \frac{1}{a} \frac{1 + a\tau i\omega}{1 + \tau^2 i\omega} = \frac{1}{a(1 + \tau^2 \omega^2)} [1 + a\tau^2 \omega^2 + i(a-1)\tau\omega],$$

d'où :

$$\frac{s}{E} = \frac{1}{a(1 + \tau^2 \omega^2)} \sqrt{(1 + a\tau^2 \omega^2)^2 + (a-1)^2 \tau^2 \omega^2},$$

$$\lg(\varphi - \psi) = \frac{(1-a)\tau\omega}{1 + a\tau^2 \omega^2},$$

avec :

$$0 < \psi - \varphi < \frac{\pi}{2};$$

on déduit, d'ailleurs :

$$\sin(\psi - \varphi) = \frac{(a-1)\tau\omega}{\sqrt{(1 + \tau^2 \omega^2)(1 + a^2 \tau^2 \omega^2)}},$$

$$\cos(\psi - \varphi) = \frac{1 + a\tau^2 \omega^2}{\sqrt{(1 + \tau^2 \omega^2)(1 + a^2 \tau^2 \omega^2)}}.$$

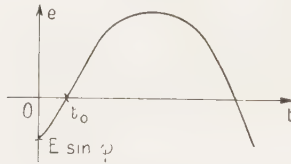


Fig. 78

Entrée particulière : $e(0) = E \sin \varphi$ que l'on supposera négatif (*fig. 78*) :

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0,$$

$$t_0 = \frac{\varphi}{\omega}.$$

Étude de $\left(\frac{ds}{dt}\right)$:

$$\frac{ds}{dt} = S \left[\omega \cos(\omega t + \psi) + \frac{1}{\tau} \sin \varphi e^{-\frac{t}{\tau}} \right],$$

$$\frac{ds}{dt}(0) = S \left(\omega \cos \psi + \frac{1}{\tau} \sin \varphi \right).$$

Posons : $u = \omega \tau$:

$$\frac{ds}{dt}(0) = \frac{S \cos \varphi}{\tau} [u \cos(\psi - \varphi) + (1 - u \sin(\psi - \varphi)) \operatorname{tg} \varphi].$$

On vérifie que quels que soient a et u : $u \sin (\psi - \varphi) < 1 \frac{ds}{dt}(0)$, a donc le signe de l'expression :

$$\frac{u \cos (\psi - \varphi)}{1 - u \sin (\psi - \varphi)} + \operatorname{tg} \varphi,$$

$$\frac{u \cos (\psi - \varphi)}{1 - u \sin (\psi - \varphi)} - \frac{u (1 + au^2)}{\sqrt{(1 + u^2) (1 + a^2 u^2) - (a - 1) u^2}},$$

d'où la conclusion :

$$|\operatorname{tg} \varphi| \leq \frac{u (1 + au^2)}{\sqrt{(1 + u^2) (1 + a^2 u^2) - (a - 1) u^2}}, \quad \frac{ds}{dt}(0) \geq 0,$$

$$\operatorname{tg} \varphi > \frac{u (1 + au^2)}{\sqrt{(1 + u^2) (1 + a^2 u^2) - (a - 1) u^2}}, \quad \frac{ds}{dt}(0) < 0.$$

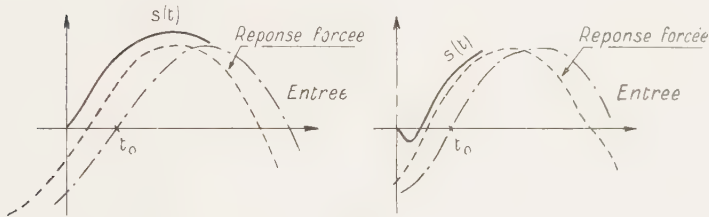


Fig. 79

Calcul de $s(t_0)$:

$$s(t_0) = s \left[\sin (\psi - \varphi) - \sin \psi e^{\frac{\varphi}{u}} \right] = \cos \varphi \left[1 + \frac{1}{(a-1)u} \operatorname{tg} \varphi \right],$$

quantité inférieure à $1 < e^{\frac{\varphi}{u}}$, donc :

$$s(t_0) > 0$$

dans tous les cas (fig. 79).

REMARQUES. — $s(t)$ peut être supérieur ou inférieur à la réponse forcée :

$$s = S \sin (\omega t + \psi) = -s \sin \psi e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ (signe de } -\sin \psi),$$

d'où :

$$|\operatorname{tg} \varphi| < \frac{(a-1)u}{1 + au^2}, \quad s < S \sin (\omega t + \psi),$$

s est inférieur à la réponse forcée,

$$\operatorname{tg} \varphi > \frac{(a-1)u}{1 + au^2}, \quad s > S \sin (\omega t + \psi),$$

s est supérieur à la réponse forcée.

Pour :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{(a-1)u}{1+au^2}, \quad \sin \psi = 0,$$

le régime transitoire disparaît :

$$s = S \sin \omega t.$$

Cas où $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

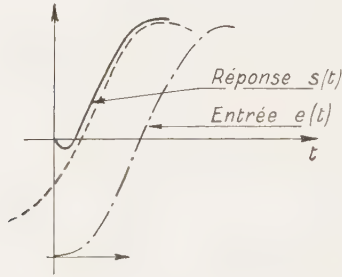


Fig. 80

Les formules générales sont toujours valables :

$$\frac{ds}{dt}(0) = s \left(\omega \cos \psi - \frac{1}{\tau} \right) = -\frac{s}{\tau} \left[1 - u \sin \left(\psi + \frac{\pi}{2} \right) \right].$$

$$\frac{ds}{dt}(0) < 0;$$

d'autre part (fig. 80) :

$$\sin \psi = \cos \left(\psi + \frac{\pi}{2} \right) > 0,$$

$$s > S \sin (\omega t + \psi).$$

ANNEXE II

Cette annexe donne quelques compléments techniques sur la troisième version expérimentale de l'étude de la turbulence.

La *figure 81* représente le croisillon qui était suspendu sous le ballon dans les essais n^{os} 12 à 17.

Aux extrémités de ces bras se trouvaient des « supports intermédiaires » tels que ceux représentés sur les *figures 82, 83 et 84*; ils étaient serrés par des colliers dans le tube de dural (fendu à son extrémité) dont le diamètre intérieur était 28 mm.

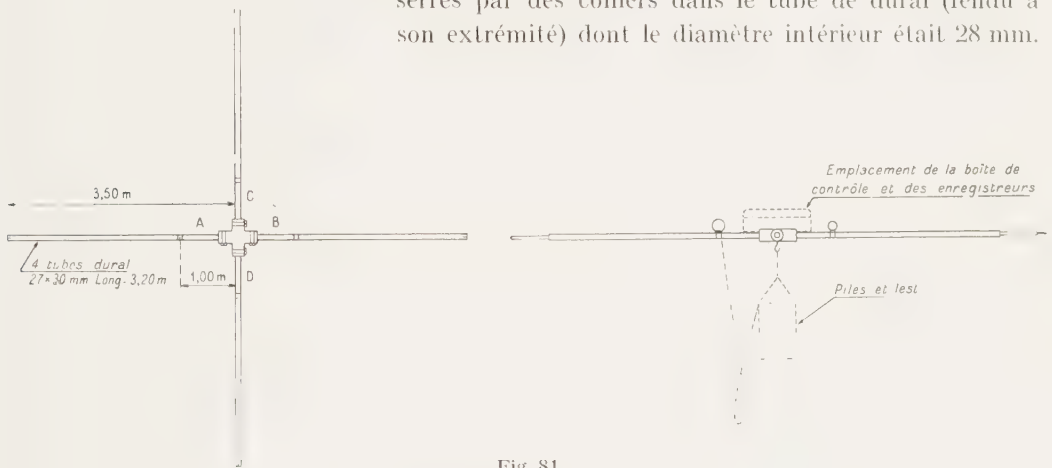


Fig. 81
Croisillon pour ballon ϕ 3,40 m

A l'autre extrémité de ces supports intermédiaires, on plaçait les fils chauds proprement dits (*fig. 63*).

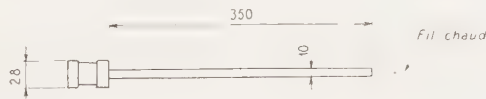


Fig. 82. — Support intermédiaire pour sondes C et D
(Essais 15 et 16)

Les boîtes de contrôle (*fig. 85 et 86*) et les enregistreurs étaient posés au centre du croisillon dans un « panier » et calés par de la fibre synthétique.

Les piles et le lest étaient placés dans un sac suspendu au croisillon par un « crochet d'amarrage » à deux contacts. Lorsque le temps d'enregistrement était écoulé le fil de nylon qui reliait ce sac au crochet d'amarrage était rompu, les résistances de protection étaient branchées et le sac dans sa chute arrachait la soupape du ballon.

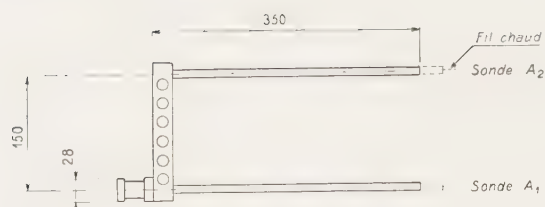


Fig. 83. — Support intermédiaire pour sondes A₁ et A₂
(Essais 15 et 16)

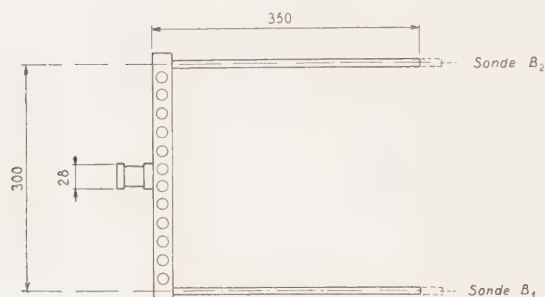


Fig. 84. — Support intermédiaire pour sondes B₁ et B₂
(Essais 15, 16, 17 et 18)

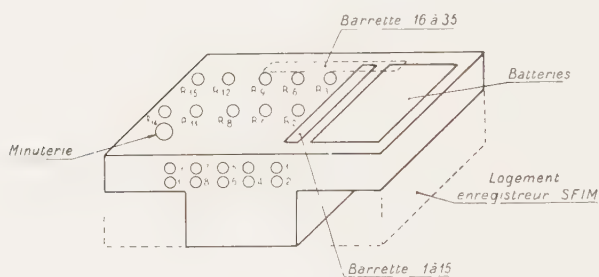


Fig. 85. — Boîte de contrôle, type 1

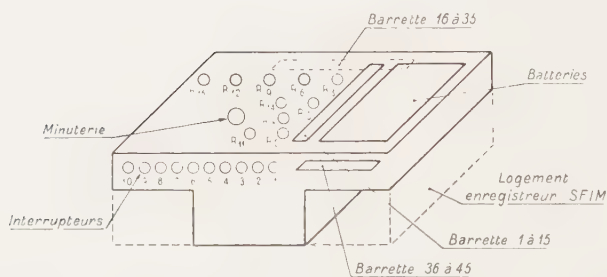


Fig. 86. — Boîte de contrôle, type 2

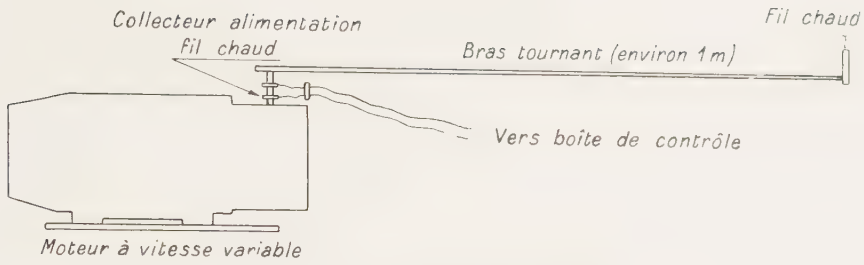


Fig. 87. — Étalonnage au bras tournant

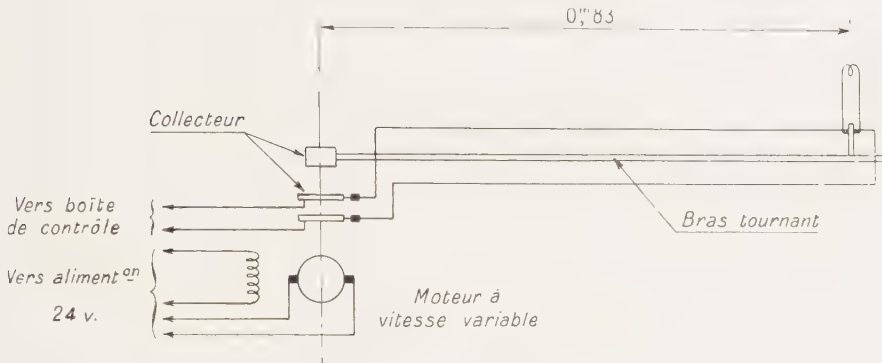


Fig. 88

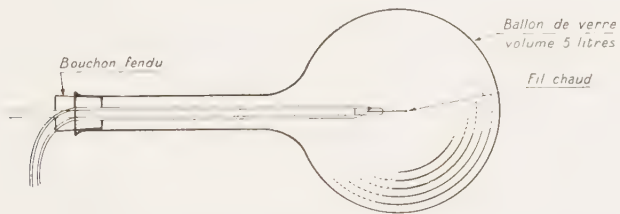


Fig. 89. — Détermination du zéro d'une sonde

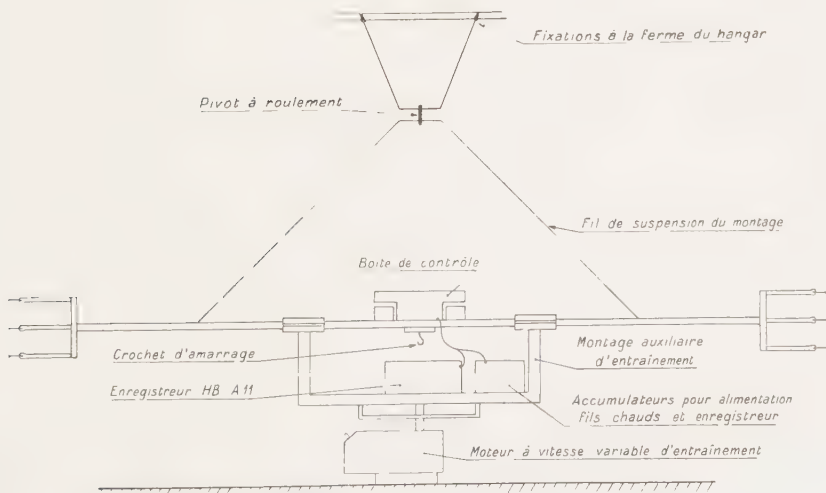


Fig. 90. — Dispositif opératoire d'étalonnage

il restait finalement suspendu à une dizaine de mètres sous le ballon, le ballon se dégonflait puis l'enveloppe formait parachute assurant finalement une vitesse descensionnelle de l'ordre de 5, 6 à 8 m/s.

Arrivée au voisinage du sol, les piles reposaient sur le sol allégeant le ballon qui ralentissait suffisamment sur ces dix derniers mètres pour éviter toute détérioration du matériel.

ÉTALONNAGES

a) Étalonnage au bras tournant.

La *figure 87* et le schéma (*fig. 88*) sont suffisamment explicites. On effectuait l'étalonnage pour cinq ou six vitesses réparties entre 1 et 10 m/s.

Auparavant, on enregistrait le « zéro » en recouvrant la sonde d'un ballon de verre de quatre à cinq litres de volume. Cette détermination du zéro se faisait également, juste avant le largage du ballon équipé, afin d'avoir sur la bande de l'enregistreur les « zéros » des sondes (*fig. 89*).

b) Étalonnage direct.

Au cours des essais n^{os} 17 et 18, on a essayé de faire les étalonnages directement une fois le matériel monté. (Les étalonnages au bras tournant sont, en effet, longs puisqu'ils sont individuels.)

Le matériel était suspendu (*fig. 90*) par l'intermédiaire d'un pivot et entraîné par le moteur à vitesse variable (auquel on avait ajouté une démultiplication dans le rapport 5).

Ce dispositif rapide et plus précis est, par contre, assez difficile à mettre en œuvre (équilibrage et centrage). Il nécessiterait, d'autre part, un moteur plus puissant, au moins 500 W.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. NASLIN. — *Les systèmes asservis*, Édit. Revue d'optique.
 - [2] G. S. BROWN, D. P. CAMPBELL. — *Principles of Servomechanisms*, Willey, New-York.
 - [3] JAMES, NICHOLS, PHILIPPS. — *Theory of Servomechanisms*, Radiation laboratory series, Mc Graw-Hill.
 - [4] Y. W. LEE, C. A. STUTT. — *Statistical Prediction of Noise*, R.L.E.; T.R., n° 129, M.I.T.
 - [5] N. WIENER. — *The extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series*, Wiley, New-York.
 - [6] Y. W. LEE. — *Cours professé au M.I.T. 1949-1950*, Notes personnelles.
 - [7] G. DARMOIS. — *Théorie et calcul des probabilités*, Éditions scientifiques Riber, 1950.
 - [8] J. LOEB. — *Annales des télécommunications*, février 1950.
 - [9] D. P. CAMPBELL. — *Power studies in linear feedback systems*, Sc. Doct. Thesis, 1949, M.I.T. library.
 - [10] *Actes du Colloque International de Mécanique*, Poitiers 1950, P.S.T. (Ministère de l'Air), n° 251, tome III.
 - [11] L. AGOSTINI et J. BASS. — *Les théories de la turbulence*, P.S.T. (Ministère de l'Air), n° 237.
 - [12] A. MARTINOT-LAGARDE. — *Introduction au spectre de la turbulence*. G.R.A., n° 46.
 - [13] S.O. RICE. — *Mathematical Study of Random Noise*, B.S.T.J., July 1944.
 - [14] A. BLANC-LAPIERRE. — *Thèse Doctorat ès Sciences*, 5 novembre 1945.
 - [15] G.S. HISLOP. — *Clear Air Gusts*, Aircraft, décembre 1950.
 - [16] PONCELET. — *Sur la vitesse ascensionnelle des ballons en caoutchouc*, Institut Royal Météorologique de Belgique.
-

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

LES DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES ET LEURS APPLICATIONS

Vu et approuvé :

Paris, le 30 octobre 1952.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

A. CHATELET.

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Jean SARRAILH.



IMPRIMERIE

